

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет

# **ЧЕТЫРЕХЗОНДОВЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Учебно-методическое пособие  
по спецпрактикуму “Физика полупроводниковых  
материалов и приборов” для студентов специализаций:  
H.02.01.06 - “Физика полупроводников и диэлектриков”,  
H.02.01.14 - “Микроэлектроника”,  
H.02.01.17 - “Новые материалы и технологии”

Минск 1998

УДК 621.315.592

Авторы: Н. А. Поклонский, С. С. Белявский, С. А. Вырко, Т. М. Лапчук

Рецензенты: Н. Ф. Голубев, канд. физ.-мат. наук (НПО “Интеграл”);  
Г. Н. Сицко, доцент (Белгосуниверситет)

Утверждено Советом физического факультета БГУ  
25 июня 1998 г., протокол №11

**Четырехзондовый метод измерения электрического сопротивления полупроводниковых материалов:** Учебно-методическое пособие по спецпрактикуму “Физика полупроводниковых материалов и приборов” для студентов физического факультета /Под редакцией Н.А. Поклонского. -Минск: Белгосуниверситет, 1998. -46 с.

Приведен вывод основных формул (с анализом необходимых и достаточных предположений) для четырехзондового метода измерения электрического сопротивления монокристаллических полупроводниковых слитков. Разъяснены и проиллюстрированы принципы измерений электрической проводимости и классического эффекта Холла методом Ван дер Пау плоских образцов (эпитаксиальных слоев, свободных пленок) произвольной формы на постоянном токе.

© Н. А. Поклонский, С. С. Белявский,  
С. А. Вырко, Т. М. Лапчук, 1998

## Содержание

Предисловие .....	4
1. Электрическое сопротивление материалов .....	5
2. Четырехзондовый метод измерения удельного электрического сопротивления монокристаллических слитков полупроводников .....	7
3. Электрическое сопротивление плоских образцов произвольной толщины .....	11
4. Метод Ван дер Пау измерения удельного сопротивления и классического эффекта Холла для изотропных плоских полупроводниковых пленок произвольной формы .....	14
5. Алгоритм измерения удельного электрического сопротивления кристаллического кремния четырехзондовым методом .....	20
6. Задания и отчет о лабораторной работе .....	24
Паспорт эксперимента .....	25
Приложение 1. Система координат в слитках монокристаллического Si .....	26
Приложение 2. Резистивная сеть. Приближение эффективной среды .....	32
Приложение 3. Конформное преобразование плоскопераллельного электростатического поля .....	34
Список литературы по тематике лабораторной работы .....	45

## Предисловие

Электрическая проводимость характеризует отклик подвижных заряженных частиц материала на внешнее электрическое поле. Постоянный (во времени) электрический ток не течет, а существует; движутся заряды (электроны и дырки проводимости, ионы). В предлагаемом методическом пособии к лабораторной работе рассматриваются методы измерения удельного электрического сопротивления кристаллических полупроводниковых материалов, в которых ионный механизм переноса электричества отсутствует, нет электролиза. При условии пропорциональности тока электрическому полю проводимость кристаллов кубической сингонии (алмаз, Si, Ge, GaAs, InSb и др.) является изотропной величиной. Студенты убеждаются в этом, определив сопротивления на различных гранях (кристаллографических плоскостях) однородно легированного слитка кремния.

Эксперимент необходимо планировать. Практика показывает, что зачастую опыты совершаются под влиянием теории, в рамках которой предполагается осмыслить данные измерений (факты). Иногда теоретические построения опровергаются. Важно не оказаться в плену одностороннего образа мышления.

В теоретической части пособия приведен вывод аналитических соотношений между измеряемыми величинами для объемных и плоских полупроводниковых образцов. Даются не только практические рецепты, но и идеи, из которых эти рецепты возникают. Цель — показать студентам необходимость осмысленного подхода к экспериментальной работе, которая всегда занимала проницательные умы.

Авторы пособия полагают, что обучение в процессе выполнения измерений электрического сопротивления и расчетов выработает у студентов элементы рационализма. Ведь будущий специалист должен ясно представлять, даст ли планируемый эксперимент ответ на поставленный технологической и/или схемотехнической практикой вопрос. Достаточна ли точность проводимых измерений? Какие действия нужно совершить, чтобы достичь цели? Заполнение паспорта эксперимента — путь к поиску наиболее полного и наглядного отражения данных опыта и их анализа.

В пунктах (разделах) 1 — 5 формулы нумеруются отдельно в каждом пункте, а нумерация рисунков и таблиц — сквозная. В каждом из трех приложений нумерация и формул, и рисунков проведена отдельно.

Работа над пособием выполнена на кафедре физики полупроводников БГУ в рамках НИР “Разработка принципов создания холодных катодов на основе широкозонных полупроводников с поверхностной прыжковой электропроводностью”.

Н. А. Поклонский

## 1. Электрическое сопротивление материалов

Омический контакт между двумя материалами характеризуется линейной и симметричной зависимостью постоянного (во времени) тока от приложенного напряжения (разности электрических потенциалов).

Электрическое сопротивление пластины материала (рис. 1, *a*) с двумя омическими контактами определяется выражением  $R = \rho L / Wt$ , где  $\rho$  — удельное сопротивление;  $L$ ,  $W$ ,  $t$  — длина, ширина и толщина проводящего слоя. При этом предполагается, что  $\rho$  не зависит от  $L$ ,  $W$ ,  $t$ , т. е. пластина сплошная и рассеянием носителей заряда на поверхности можно пренебречь. Если  $L = W$  (образец представляет собой квадрат), то  $R_{\square} = \rho / t$  называют поверхностным сопротивлением и выражают в Ом/квадрат, или Ом/ $\square$ . Таким образом,  $R = R_{\square} = L/W$ .

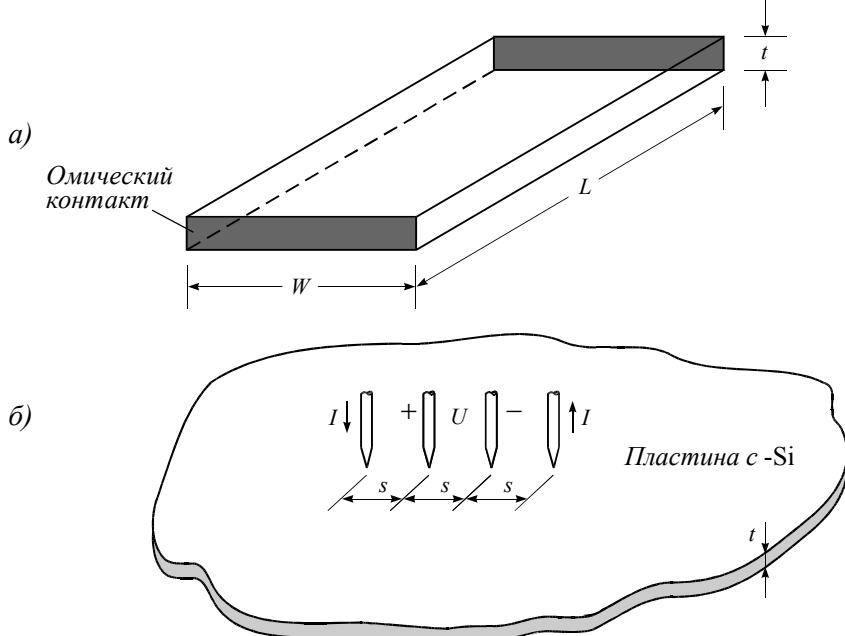


Рис. 1. Поверхностное сопротивление: *а*) — геометрия образца; *б*) — четырехзондовая головка для измерения поверхностного сопротивления  $R_{\square}$

Для измерения поверхностного сопротивления тонких слоев используют четырехзондовое устройство, показанное на рис. 1, *б*. Четырехзондовый метод основан на явлении растекания тока в точке контакта металлического острия с полупроводником. Если толщина слоя  $t$  мала по сравнению с расстоянием между зондами (электродами), т. е.  $t \ll s$ , и край пластины находится на достаточно большом расстоянии от зондов, то поверхностное сопротивление при расположении зондов вдоль пря-

мой линии определяется из приближенного выражения (доказательство см. ниже; п. 3)

$$R_{\square} = (\pi / \ln 2) U / I \approx 4,53 U / I,$$

где ток  $I$  возбуждается через два внешних зонда, а разность электрических потенциалов  $U$  измеряется между двумя внутренними зондами с помощью вольтметра с высоким входным сопротивлением. Из-за того, что для возбуждения тока и измерения разности электрических потенциалов используются различные пары зондов, контактное сопротивление перехода металл-полупроводник не влияет на результат измерения. Между двумя внешними зондами пропускается небольшой постоянный ток (чтобы избежать разогрева пластины).

Замечание 1. При измерении удельного электрического сопротивления тонких полупроводниковых слоев, толщина которых соизмерима с длиной экранирования электростатического поля, необходимо учитывать наличие на их поверхности обедненных или обогащенных слоев, удельная проводимость которых отличается от удельной проводимости объема полупроводника.

Задача №1. При измерении четырехзондовым методом (расстояние между зондами  $s = 1,3$  мм) величина тока  $I = 1$  мА. Какое примерно напряжение  $U$  будет измерено на  $n^+$ -области Si с поверхностной концентрацией атомов фосфора  $\tilde{N} = 10^{12}$  см $^{-2}$ ? Фосфор введен с помощью диффузии в пластину  $p$ -Si. Предположить, что глубина  $n^+ p$ -перехода  $x_j \approx t = 1$  мкм; концентрация электронов проводимости (при полной ионизации доноров и слабой степени их компенсации акцепторами)  $n \approx (\tilde{N})^{3/2}$ ;  $\mu_n \approx 280$  см $^2/(B \cdot c)$  — подвижность электронов при температуре  $T = 300$  К в  $n^+$ -слое кристаллического кремния ( $c$ -Si).

Задача №2. Резистор из поликристаллического кремния (*poly*-Si) с удельным сопротивлением  $\rho = 500$  мкОм·см имеет длину  $L = 1$  мм, ширину  $W = 5$  мкм и толщину  $t = 0,5$  мкм. Ток пропускается через такой резистор сопротивлением  $R$ , чтобы зарядить конденсатор емкостью  $C = \epsilon_{ox} \epsilon_0 A / d$ , имеющий “металлические” обкладки площадью  $A = 0,1 \times 0,5$  мм $^2$  с двух сторон слоя  $a$ -SiO<sub>2</sub> (толщина  $d = 100$  нм, относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{ox} = 3,9$ ; электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85$  пФ/м). Чему равна постоянная времени  $RC$  для последовательно включенной цепочки резистор-конденсатор? (Указанное  $\rho$  поликремния близко к минимально достижимому при  $T = 300$  К значению, которое ограничивает возможность использования поликремния в качестве материала для межсоединений в интегральных схемах из  $c$ -Si).

Задача №3. В  $n$ -Si термической диффузией введены атомы бора с равномерной концентрацией  $N_a = 10^{16}$  см $^{-3}$  на глубину 1,6 мкм так, чтобы создать интегральный резистор. Провести расчеты и определить

$L = W$  (по рис. 1, *a*) для сопротивления резистора  $R = 10$  кОм при температуре  $T = 300$  К; концентрация делокализованных дырок  $p \approx N_a$ , подвижность  $\mu_p \approx 390$  см<sup>2</sup>/(В · с). Резистор должен рассеивать 10 мВт; максимальное допустимое рассеяние мощности составляет 1 мкВт/мкм<sup>3</sup>.

## 2. Четырехзондовый метод измерения удельного электрического сопротивления монокристаллических слитков полупроводников (толщина проводящего слоя много больше расстояния между зондами)

Для применения четырехзондового метода не требуется создания омических контактов к образцу. Возможно измерение удельного сопротивления монокристаллических слитков разнообразной кристаллографической ориентации (см. Приложение 1). Условия его применения: 1) зонды расположены на плоской поверхности однородного образца полубесконечного объема; 2) инжекция электронов (дырок) в объем образца отсутствует; 3) зонд не должен химически реагировать с полупроводниковым материалом. Обычно зонды имеют контакты с поверхностью образца в точках, которые расположены вдоль прямой линии или по углам квадрата.

Схематично четырехзондовый метод реализуют так. На плоской поверхности образца вдоль прямой линии размещают четыре металлических иглообразных электрода (рис. 2 *a*, *б*), расстояния между которыми  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  много меньше толщины полупроводникового слоя  $t$ . Через два внешних зонда 1 и 4 возбуждают электрический ток  $I_{14}$ , на двух внутренних зондах 2 и 3 измеряют разность потенциалов  $U_{23}$ . По изме-

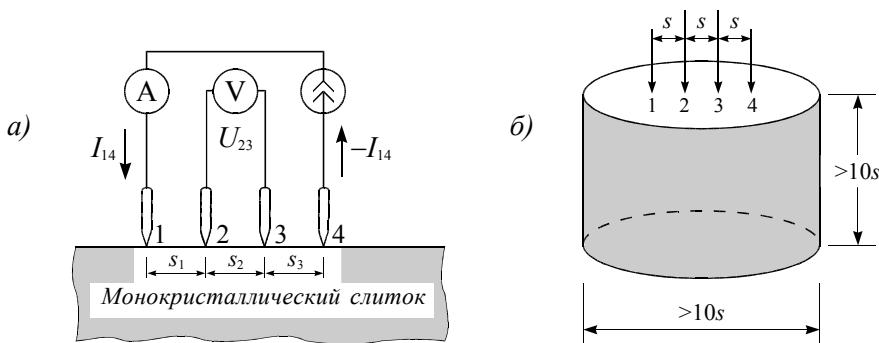


Рис. 2. Измерение удельного электрического сопротивления на срезе монокристаллического слитка четырехзондовым методом: *а*) блок-схема включения источника постоянного тока, амперметра А и вольтметра В; *б*) примерные соотношения между размерами слитка и межзондовым расстоянием  $s = s_1 = s_2 = s_3$

ренным значениям разности потенциалов между зондами 2 и 3 и тока, протекающего через зонды 1 и 4, определяют удельное сопротивление  $\rho$  образца.

2.1. Рассмотрим протекание тока через отдельный точечный зонд, находящийся в контакте с плоской поверхностью полупроводникового образца полубесконечного объема.

Электрическое поле  $\mathbf{E}$  постоянного тока  $I$  формально аналогично электростатическому полю  $\mathbf{E} = -\text{grad}U$ , где  $U$  — потенциал. Общим свойством их является потенциальность:  $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ . Для обоих полей справедливо уравнение Лапласа  $\text{div grad}U = \nabla^2U = 0$ , если рассматриваемая область электрического поля тока находится вне источников энергии (сторонних э.д.с.), а область электростатического поля — вне объемного заряда. Из подобия уравнений, описывающих эти поля, следует формальная аналогия между соответствующими величинами и тождественность граничных условий для них при одинаковой форме граничных поверхностей. При этом картины обоих полей подобны, что позволяет электростатическое поле в диэлектрике (изоляторе) моделировать электрическим полем постоянного тока в проводнике (нормальном металле), и наоборот. Имеет место аналогия: решение токовой задачи может быть получено из решения задачи электростатики (и наоборот), если сделать замены по табл. 1. На границе раздела материалов 1 и 2 для нормальных ( $n$ ) и тангенциальных ( $\tau$ ) составляющих полей (токов) записаны условия непрерывности.

По табл. 1 электростатический потенциал  $U(r)$  на расстоянии  $r$  от

Таблица 1

Электрическое поле постоянного тока	Электростатическое поле
$\text{rot} \mathbf{E} = 0; E_{1\tau} = E_{2\tau}$ $\mathbf{E} = -\text{grad}U; U_1 = U_2$ $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ — плотность тока $\text{div} \mathbf{J} = 0; J_{1n} = J_{2n}$ $\text{div grad}U = \nabla^2U = 0$ $I$ — ток $\sigma$ — удельная проводимость $R^{-1}$ — проводимость	$\text{rot} \mathbf{E} = 0; E_{1\tau} = E_{2\tau}$ $\mathbf{E} = -\text{grad}U; U_1 = U_2$ $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ — электрическое смещение $\text{div} \mathbf{D} = 0; D_{1n} = D_{2n}$ $\text{div grad}U = \nabla^2U = 0$ $Q$ — заряд $\epsilon$ — диэлектрическая проницаемость $C$ — электрическая емкость

точки касания токового зонда с полубесконечным образцом (рис. 3, *a*) имеет сферическую симметрию и для его определения достаточно ре-

шить уравнение Лапласа  $\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0$  при условии, что

$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$ . Интегрирование  $\nabla^2 U = 0$  дает  $U = -C_1/r$ , где константу

$C_1$  можно вычислить из граничных условий для напряженности электростатического поля

$$E(r) = -dU/dr.$$

Так как плотность тока  $J$ , протекающего через полусферу радиусом  $r$ , равна  $J = I/(2\pi r^2)$ , а в соответствии с законом Ома  $J = E/\rho$ , то возникающая в образце напряженность электрического поля  $E(r) = I\rho/(2\pi r^2)$ . Интегрируя  $E(r)$ , получим потенциал на расстоянии  $r$  от точки касания зонда с образцом

$$U = I\rho/(2\pi r). \quad (1)$$

Если форма контакта зонда с поверхностью образца имеет вид полусферы радиуса  $r_n$  (см. рис. 3,  $\delta$ ), то распределение потенциала будет

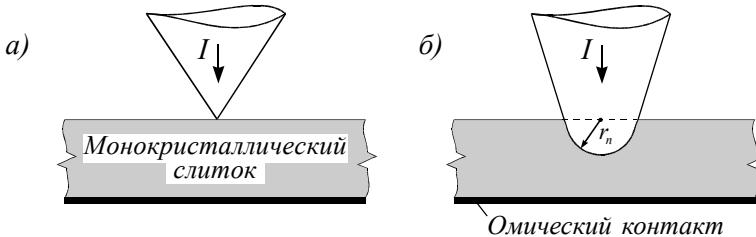


Рис. 3. Модели электрического контакта металлического зонда с полупроводниковым образцом: а) точечный зонд; б) полусферический зонд

таким же. Электрическое напряжение на образце равно электрическому потенциалу зонда:

$$U(r_n) = I\rho/(2\pi r_n). \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что на приконтактном слое образца толщиной

$$r - r_n > 0 \text{ напряжение } U(r_n) - U(r) = \frac{I\rho(r - r_n)}{2\pi r r_n}. \text{ Например, при } r = 10r_n$$

напряжение на зонде  $U(r_n)$  превосходит напряжение на слое толщиной  $r - r_n$  лишь на 10%, т. е. основное изменение потенциала происходит вблизи зонда. Это означает, что величина протекающего через зонд тока определяется сопротивлением приконтактной области, протяженность которой тем меньше, чем меньше радиус закругления контакта  $r_n$ .

Замечание 2. Контактные сопротивления являются одной из причин, огра-

ничивающих применение четырехзондового метода. Если прижимной контакт металлического зонда с поверхностью полупроводникового материала имеет большое переходное сопротивление, то зондовый метод измерения удельного электрического сопротивления  $\rho$  практически нереализуем. Иногда применяется электрическая формовка контактов разрядом конденсатора.

Замечание 3. Метод сопротивления растекания(ю) тока “точечного” контакта основан на измерении сопротивления структуры, состоящей из полупроводникового образца и металлического зонда, установленного на его плоской поверхности. Предполагается, что второй контакт к полупроводнику имеет большую площадь, пренебрежимо малое сопротивление и расположен далеко от металлического зонда (на тыловой стороне образца). Если металлический зонд имеет с поверхностью полупроводника омический контакт малой площади, то сопротивление структуры, измеряемое при пропускании тока через этот контакт, называют сопротивлением растекания  $R_p$ . Как следует из закона распределения электрического потенциала в образце полубесконечного объема (формула (2)), сопротивление растекания  $R_p = U/I = \rho/(2\pi r_n)$ , где  $r_n$  — радиус полусферического металлического контакта. Если допустить, что слой окисла на поверхности образца и приповерхностная область полупроводника существенно не влияют на сопротивление структуры, то его можно считать равным  $R_p$ . Отметим, что действительную геометрическую форму и размеры контакта между металлическим зондом и плоской поверхностью полупроводника установить трудно вследствие механической деформации материалов. Пусть поверхность соприкосновения металлического зонда с полупроводниковым образцом имеет форму плоского круглого диска радиусом  $r_d$ . Закон распределения электрического потенциала в полубесконечном однородном образце находим по табл. 1. Электростатическое поле вдоль оси  $OZ$ , нормальной к плоскости диска с поверхностью плотностью заряда  $\chi$ , есть  $E(z) = (\chi/2\epsilon) \left(1 - z/\sqrt{r_d^2 + z^2}\right)$ , где  $z$  —

расстояние от центра диска в глубь полупроводника с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon_s \epsilon_0$ . Разность электрических потенциалов между центром диска ( $z = 0$ ) и тыловым омическим контактом к полупроводнику ( $z \rightarrow \infty$ ) равна

$$U = \int_0^\infty E(z) dz = \chi r_d / 2\epsilon = E(0) r_d. \text{ Плотность входящего в полупроводник тока}$$

$J(0) = I/\pi r_d^2 = E(0)/\rho$ . Сопротивление растекания тока плоского круглого омического контакта (металлического диска радиусом  $r_d$ ) с полупроводником есть  $R_p = U/I = \rho/\pi r_d$ .

2.2. Рассмотрим токи и потенциалы в образце при расположении четырех точечных зондов вдоль прямой линии. По принципу суперпозиции электростатический потенциал в любой точке образца равен сумме потенциалов, создаваемых в этой точке током каждого зонда (рис. 2). При этом потенциал имеет положительный знак для тока, втекающе-

го в образец (зонд 1), и отрицательный знак для тока, вытекающего из образца (зонд 4). Для системы зондов, расстояния между которыми  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$ , потенциалы измерительных зондов 2 и 3 равны (по формуле (1)):

$$U_2 = \frac{I_{14}\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2 + s_3} \right); \quad U_3 = \frac{I_{14}\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{s_1 + s_2} - \frac{1}{s_3} \right).$$

Разность потенциалов между зондами 2 и 3 есть

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \frac{I_{14}\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2 + s_3} - \frac{1}{s_1 + s_2} + \frac{1}{s_3} \right) > 0. \quad (3)$$

Согласно (3), удельное сопротивление образца

$$\rho = \frac{2\pi}{\left( \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2 + s_3} - \frac{1}{s_1 + s_2} + \frac{1}{s_3} \right)} \frac{U_{23}}{I_{14}}.$$

Если расстояния между зондами одинаковы, т. е.  $s = s_1 = s_2 = s_3$ , то

$$\rho = 2\pi s \frac{U_{23}}{I_{14}}. \quad (4)$$

Используя другие комбинации включения токовых и потенциальных зондов, можно получить аналогичные выражения для удельного сопротивления, которые отличаются от (4) значениями числовых коэффициентов (см. табл. 2). Ясно, что комбинации №1 и №4 обеспечивают максимальное регистрируемое напряжение при прочих равных условиях.

### 3. Электрическое сопротивление плоских образцов произвольной толщины

№ комбинации	Токовые зонды	Ток	Потенциальные зонды	Разность потенциалов	Таблица 2	
					Числовой коэффициент	
1	1; 4	$I_{14}$	2; 3	$U_{23}$	$2\pi$	
2	1; 2	$I_{12}$	3; 4	$U_{34}$	$6\pi$	
3	1; 3	$I_{13}$	2; 4	$U_{24}$	$3\pi$	
4	2; 3	$I_{23}$	1; 4	$U_{14}$	$2\pi$	
5	2; 4	$I_{24}$	1; 3	$U_{13}$	$3\pi$	
6	3; 4	$I_{34}$	2; 1	$U_{21}$	$6\pi$	

#### 3.1. Четыре металлических зонда, прижимаемые пружинами к поверхности полупроводника, расположены вдоль прямой линии и отсто-

ят друг от друга на равном расстоянии  $s$  (см. рис. 4). Через зонды 1 и 4 в полупроводнике возбуждается ток  $I = I_{14}$ , а между зондами 2 и 3 изменяется разность электрических потенциалов  $U = U_{23} > 0$ .

3.1.1. Если  $t \gg s$ , т. е. толщина полупроводникового образца  $t$  много больше расстояния между зондами  $s$ , а границы его удалены в беско-

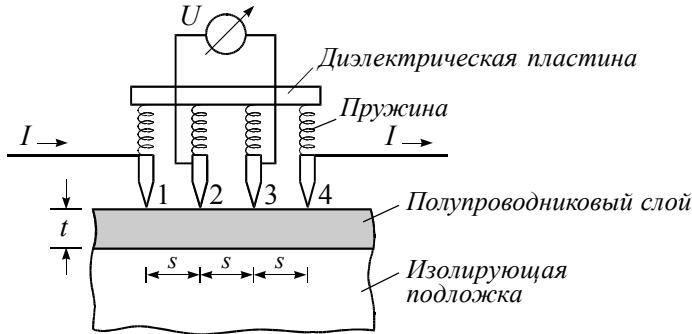


Рис. 4. Четырехзондовый метод измерения электрического сопротивления

нечность, то для удельного сопротивления  $\rho$  образца имеем

$$\rho = \frac{2\pi s U}{I}. \quad (1)$$

Докажем равенство (1), предполагая, что ток  $I$ , текущий в нижнем полупространстве, целиком заполненном полупроводником, вызывает такую же разность электрических потенциалов, как ток  $2I$ , текущий во всем пространстве, которое также предполагается целиком заполненным полупроводником. Тогда плотность тока  $J$  на расстоянии  $r$  от токового электрода 1 равна  $2I/4\pi r^2$  и для напряженности электрического поля получаем

$$E_1(r) = \rho J = \rho \frac{2I}{4\pi r^2}. \quad (2)$$

Следовательно, разность электрических потенциалов между зондами 2 и 3 есть

$$U_2^{(1)} - U_3^{(1)} = \int_2^3 \mathbf{E}_1 d\mathbf{r} = \frac{I\rho}{2\pi} \int_{2s}^{2s} \frac{dr}{r^2} = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{2s} \right) = \frac{I\rho}{4\pi s}. \quad (3)$$

Электрическое поле, порождаемое токовым электродом 4 на расстоянии  $r$  от него, равно  $E_4(r) = -2I\rho/4\pi r^2$ ; разность электрических потенциалов между электродами 2 и 3 есть

$$U_2^{(4)} - U_3^{(4)} = \int_2^3 \mathbf{E}_4 d\mathbf{r} = -\frac{I\rho}{2\pi} \int_{2s}^s \frac{dr}{r^2} = \frac{I\rho}{4\pi s}. \quad (4)$$

Итак, при  $t \gg s$  полная разность электрических потенциалов (между электродами 2 и 3)  $U = U_{23} = U_2^{(1)} - U_3^{(1)} + U_2^{(4)} - U_3^{(4)} = I\rho/2\pi s$  определяет величину  $\rho$  согласно (1).

В расчете (1) — (4) предполагается, что ток уходит из электрода 1 на бесконечность, “создавая” между зондами 2 и 3 разность электрических потенциалов  $U_2^{(1)} - U_3^{(1)}$ , затем ток из бесконечности течет к электроду 4, создавая разность потенциалов  $U_2^{(4)} - U_3^{(4)}$ .

3.1.2. Если образец представляет собой плоскопараллельную пластину толщиной  $t \ll s$ , то растекание тока от точечного электрода имеет цилиндрическую симметрию. Плотность тока  $J = I/(2\pi rt) = E(r)/\rho$ , откуда разность электрических потенциалов между электродами 2 и 3 есть

$$U = U_2^{(1)} - U_3^{(1)} + U_2^{(4)} - U_3^{(4)} = \int_s^{2s} \mathbf{E}_1 d\mathbf{r} + \int_{2s}^s \mathbf{E}_4 d\mathbf{r} = \frac{I\rho}{\pi t} \ln 2; \quad (5)$$

удельное ( $\rho$ ) и поверхностное ( $R_{\square}$ ) электрическое сопротивление:

$$\rho = \frac{U}{I} \frac{\pi}{\ln 2} t = t R_{\square}. \quad (6)$$

3.2. Четыре зонда расположены по углам квадрата. Ток пропускают через зонды, образующие одну из сторон квадрата, например, через зонды 1 и 4, а напряжение измеряют на другой паре зондов 2 и 3. Расстояние по диагонали между двумя зондами равно  $s\sqrt{2}$ . Для определенности считаем, что потенциальный электрод 2 находится на расстоянии  $s$  от токового электрода 1, из которого ток  $I$  втекает в образец, и на расстоянии  $s\sqrt{2}$  от электрода 4, в который ток вытекает из образца. Коммутируя направление тока последовательно через каждую пару контактов по контуру квадрата и усредняя полученные четыре значения удельного сопротивления  $\rho$ , можно снизить уровень случайной погрешности в 2 раза по сравнению с расположением всех зондов вдоль прямой линии.

3.2.1. В случае толстого образца ( $t \gg s$ ) при расположении зондов по углам квадрата из соотношений (2) — (4) имеем разность электрических потенциалов

$$U = U_{23} = 2 \frac{\rho I}{2\pi} \int_s^{\frac{s\sqrt{2}}{2}} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho I}{\pi s} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

удельное сопротивление

$$\rho = \frac{2\pi s U}{(2 - \sqrt{2}) I}. \quad (7)$$

3.2.2. В случае тонкого образца ( $t \ll s$ ) при размещении зондов по углам квадрата из соотношения (5) имеем разность электрических потенциалов

$$U = U_{23} = 2 \frac{\rho I}{2\pi t} \int_s^{\frac{s\sqrt{2}}{2}} \frac{dr}{r} = \frac{\rho I}{2\pi t} \ln 2;$$

удельное сопротивление

$$\rho = \frac{2\pi t U}{I \ln 2} = t R_{\square}. \quad (8)$$

#### 4. Метод Ван дер Пау измерения удельного сопротивления и классического эффекта Холла для изотропных плоских полупроводниковых пленок произвольной формы

4.1. На границе по контуру плоскопараллельного образца толщиной  $t$  формируются точечные контакты  $A — B — C — D$  (см. рис. 5,  $a, b$ ). От контакта  $A$  к контакту  $B$  возбуждается ток  $I_{AB}$ . Между контактами  $D$  и  $C$  возникает разность потенциалов  $U_{DC} = -U_{CD}$ , так что сопротивление

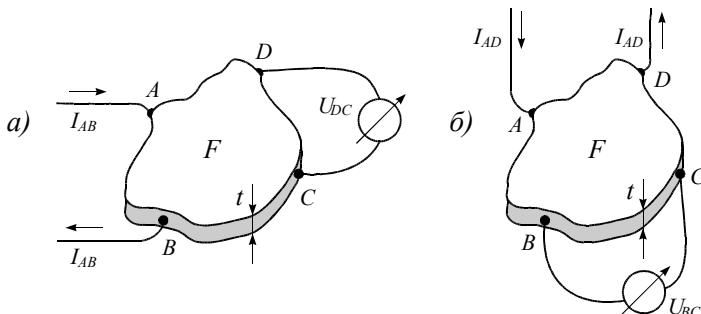


Рис. 5. Схема размещения и коммутации контактных зондов при измерении удельного сопротивления плоской пленки  $F$  толщиной  $t$  по Ван дер Пау

$$R_{AB,DC} = \frac{U_{DC}}{I_{AB}} = \frac{U_D - U_C}{I_{AB}}.$$

Если от контакта  $A$  к контакту  $D$  возбуждается ток  $I_{AD}$ , а между  $B$  и  $C$  измеряется разность электрических потенциалов  $U_{BC} = U_B - U_C = -U_{CB}$ , то сопротивление

$$R_{AD,BC} = \frac{U_{BC}}{I_{AD}} = \frac{U_B - U_C}{I_{AD}}.$$

Ван дер Пау доказал (см. ниже), что удельное электрическое сопротивление  $\rho$  плоской пленки толщиной  $t$  определяется из трансцендентного уравнения

$$\exp\left(-\pi \frac{t}{\rho} R_{AB,DC}\right) + \exp\left(-\pi \frac{t}{\rho} R_{AD,BC}\right) = 1. \quad (1)$$

После измерения сопротивлений  $R_{AB,DC}$  и  $R_{AD,BC}$  для одного образца из (1) вычисляется его удельное сопротивление  $\rho$  или поверхностное сопротивление  $R_{\square} = \rho/t$  (при неизвестной толщине образца  $t$ ). Вследствие однородности и изотропности образца отношение  $R_{AB,DC}/R_{AD,BC}$  должно быть равно единице. Если в условиях эксперимента это отношение оказывается большим двух, то обычно заменяют контакты. Если и это не помогает, то скорее всего образец не является однородно легированным (см. Приложение 2).

4.1.1. Докажем соотношение (1) для плоскопараллельной пленки исчезающе малой толщины  $t$  (в направлении оси координат  $OZ$ ), полностью заполняющей верхнюю полуплоскость  $XY$  (см. рис. 6, *a*).

Токовые точечные контакты обозначены через  $K$  и  $L$ . Между элект-

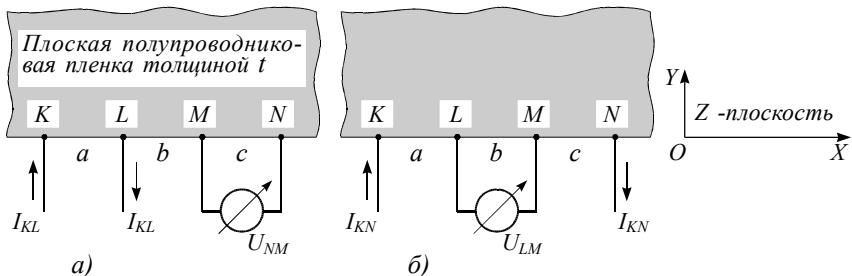


Рис. 6. Форма образца, используемая для доказательства соотношения (1)

рическими зондами  $N$  и  $M$  измеряется разность электрических потенциалов  $U_{NM} = U_N - U_M = -U_{MN}$ .

Линии тока и потенциалы остаются неизменными, если, дополняя

верхнюю полуплоскость  $XY$  нижней, одновременно вдвое увеличить значение тока. Тогда на расстоянии  $r$  от контакта  $K$  плотность тока  $J = 2I_{KL}/(2\pi rt)$ ; электрическое поле  $E_K = \rho J$ . Отсюда разность электрических потенциалов между точками  $N$  и  $M$  есть

$$U_{NM}^{(K)} = U_N^{(K)} - U_M^{(K)} = \int_N^M \mathbf{E}_K d\mathbf{r} = \frac{\rho I_{KL}}{\pi t} \int_N^M \frac{dr}{r} = \\ = \frac{\rho I_{KL}}{\pi t} \ln \frac{|\mathbf{KM}|}{|\mathbf{KN}|} = -\frac{\rho I_{KL}}{\pi t} \ln \frac{a+b+c}{a+b},$$

где  $a = |\mathbf{KL}|$ ,  $b = |\mathbf{LM}|$ ,  $c = |\mathbf{MN}|$  — расстояния между зондами. Поскольку ток  $2I_{KL}$  вытекает из полупроводника в точке  $L$ , имеется дополнительная разность электрических потенциалов

$$U_{NM}^{(L)} = U_N^{(L)} - U_M^{(L)} = \int_N^M \mathbf{E}_L d\mathbf{r} = -\frac{\rho I_{KL}}{\pi t} \int_N^M \frac{dr}{r} = \\ = \frac{\rho I_{KL}}{\pi t} \ln \frac{|\mathbf{LN}|}{|\mathbf{LM}|} = -\frac{\rho I_{KL}}{\pi t} \ln \frac{b}{b+c},$$

где  $E_L = -\rho I_{KL}/(\pi rt)$  — электрическое поле на расстоянии  $r$  от тоководного электрода  $L$ .

Полная разность электрических потенциалов  $U_{NM} = U_{NM}^{(K)} + U_{NM}^{(L)}$  определяется выражением

$$U_{NM} = -\frac{\rho I_{KL}}{\pi t} \ln \frac{(a+b+c)b}{(a+b)(b+c)}.$$

Разделив  $U_{NM}$  на ток  $I_{KL}$ , получаем сопротивление  $R_{KL,NM} = U_{NM}/I_{KL}$ . Потенцируя, находим

$$\exp\left(-\frac{\pi t}{\rho} R_{KL,NM}\right) = \frac{(a+b+c)b}{(a+b)(b+c)}. \quad (2)$$

Если ток втекает в образец через контакт  $K$  и вытекает через  $N$ , то  $L$  и  $M$  — зонды для измерения разности потенциалов (рис. 6. 6). Тогда

$$U_{LM} = U_L^{(K)} - U_M^{(K)} + U_L^{(N)} - U_M^{(N)} = -\frac{\rho I_{KN}}{\pi t} \ln \frac{ac}{(b+c)(a+b)},$$

и сопротивление  $R_{KN,LM} = U_{LM}/I_{KN}$  удовлетворяет соотношению:

$$\exp\left(-\frac{\pi t}{\rho} R_{KN,LM}\right) = \frac{ac}{(b+c)(a+b)}. \quad (3)$$

Правые части выражений (2) и (3) в сумме дают единицу, что и доказывает справедливость соотношения Ван дер Пау (1) для “идеального” образца, показанного на рис. 6.

4.1.2. Докажем соотношение (1) для плоского образца с произвольной формой границы.

В верхней полуплоскости плоскости  $Z$  (см. рис. 6) введем комплексный потенциал (см. Приложение 3)

$$f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где  $u(x, y)$  — электрический потенциал,  $v(x, y)$  — силовые линии поля (линии тока). Тогда напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla u(x, y) = \left( -\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Для тока  $I_{KL}$ , который пересекает линию, соединяющую две произвольные точки  $P_1$  и  $P_2$  на оси  $OX$  (рис. 6, a), имеем

$$I_{KL} = t \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{J} d\mathbf{n} = \frac{t}{\rho} \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{n} = \frac{t}{\rho} \int_{P_1}^{P_2} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right), \quad (4)$$

где  $d\mathbf{n} = (-dy, dx)$  — нормаль к элементу длины  $d\mathbf{l} = (dx, dy)$  вдоль линии тока. С помощью соотношений Коши-Римана  $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$ ,  $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$  из (4) получаем:

$$I_{KL} = \frac{t}{\rho} \int_{P_1}^{P_2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \frac{t}{\rho} [v(P_2) - v(P_1)]. \quad (5)$$

Вектор, являющийся произведением удельного сопротивления  $\rho$  на плотность тока  $\mathbf{J}$ , имеет компоненты

$$\rho \mathbf{J} = \left( -\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mathbf{E}.$$

Величина  $v(x, y)$  не меняется, если на рис. 6, a двигаться вдоль вещественной оси  $OX$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е. вдоль границы образца вплоть до точки  $K$ , где ток втекает в образец. Здесь, согласно (5), величина  $v(x, y)$  увеличивается на  $(\rho/t)I_{KL}$ . В точке  $L$ , напротив,  $v(x, y)$  уменьшается

на эту же величину.

Верхнюю полуплоскость  $XY$  (рис. 6, *a*) можно конформно отобразить на поверхность пленки  $F$  (рис. 5, *a*), если ввести аналитическую функцию

$$w(z) = w(x + iy) = \xi + i\eta,$$

где  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  — вещественная и мнимая части функции  $w(z)$ . Предварительно совместим плоскость пленки  $F$  с комплексной плоскостью  $W$ , задаваемую осями координат  $O\Xi$  и  $O\text{Н}$ . Мнимая часть  $\eta$  остается неизменной вдоль края образца, за исключением точек  $A$  и  $B$ , где расположены токовые контакты. В точке  $A$  значение  $\eta$  возрастает на величину  $(\rho/t)I_{AB}$ , а в точке  $B$  на ту же величину уменьшается. Для определения потенциала в области  $F$  необходимо выразить  $x$  и  $y$  из соотношений  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ ; получим  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ . Тогда функция  $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  представляет электрический потенциал в области  $F$ . При этом точки  $K, L, M, N$  верхней полуплоскости  $Z$  (задаваемой осями  $OX$  и  $OY$ ) переходят, соответственно, в точки  $A, B, C, D$  области  $F$ . Следовательно,  $U_{DC} = U_{NM}$ . Из теории конформных преобразований следует, что  $(t/\rho)R_{AB,DC}$  — инвариантная величина (см. Приложение 3). Действительно,  $I_{AB}$  — гармоническая функция, т. е. инвариантная величина относительно конформных преобразований. Разность электрических потенциалов  $U_{DC}$  также гармоническая функция. Поскольку  $I_{AB}$  и  $U_{DC}$  — инвариантные величины, то из формулы  $R_{AB,DC} = U_{DC}/I_{AB}$  следует, что  $R_{AB,DC}$  — инвариантная величина относительно конформных преобразований. То же утверждение справедливо и в отношении  $(t/\rho)R_{AD,BC}$ .

Итак, соотношение (1) доказано для плоского образца любой формы.

4.2. При измерениях эффекта Холла (рис. 7) в немагнитный образец, лежащий в плоскости  $XY$ , ток втекает в точке  $A$  и вытекает в точке  $C$ ;

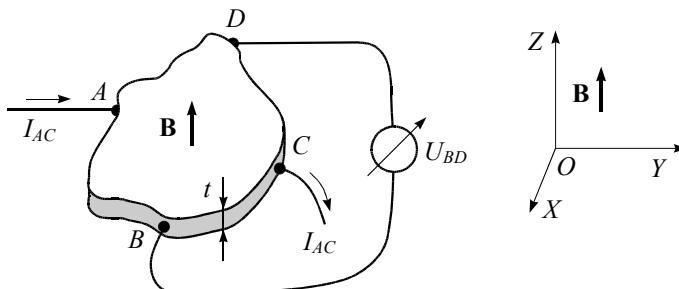


Рис. 7. Схема расположения и коммутации электрических зондов при измерении эффекта Холла методом Ван дер Пау в плоской пленке толщиной  $t$

разность электрических потенциалов  $U_{BD} = U_B - U_D$  определяется между точками  $B$  и  $D$ . Сопротивление  $R_{AC,BD} = U_{BD}/I_{AC}$  изменяется на величину  $\Delta R_{AC,BD}$ , если перпендикулярно плоскому параллельному образцу вдоль оси  $OZ$  прикладывается постоянное (во времени) магнитное поле  $\mathbf{B} = \tilde{\mu} \mathbf{H}$ , где  $\tilde{\mu} = \mu_s \mu_0$  — магнитная проницаемость полупроводника,  $\mu_s \approx 1$ ;  $\mu_0 = 1,25 \text{ мкГн/м}$  — магнитная постоянная;  $|\mathbf{B}| = B_z$ . Для коэффициента Холла  $R_H$  имеем (см. ниже):

$$R_H = \frac{t}{B_z} \Delta R_{AC,BD}, \quad (6)$$

где  $t$  — толщина образца,  $\Delta R_{AC,BD}$  — холловское сопротивление,  $|\mathbf{B}| = B_z$  — модуль индукции внешнего однородного (по плоскости  $XY$ ) магнитного поля напряженностью  $\mathbf{H}$ .

Докажем соотношение (6). Из-за отклонения подвижных носителей заряда внешним магнитным полем противоположные края образца конечных размеров заряжаются так, что линии тока остаются такими же, как и до включения магнитного поля. Электрические потенциалы точек  $B$  и  $D$  изменяются под действием поля Холла  $\mathbf{E}_H = -R_H [\mathbf{J} \times \mathbf{B}]$ , перпендикулярного плотности тока  $\mathbf{J}$ , в то время как линии тока остаются неизменными. На рис. 8 точки  $B'$  и  $D$  расположены на одной эквипотен-

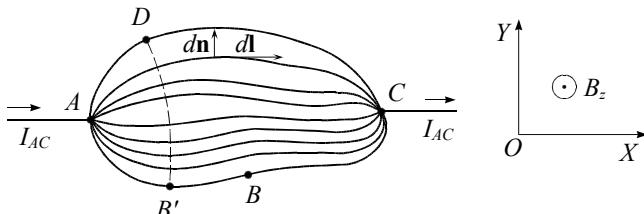


Рис. 8. Линии тока и эквипотенциаль  $B'D$  в плоском образце, находящемся в поперечном плотности тока  $\mathbf{J}(x, y)$  магнитном поле  $\mathbf{B} \parallel OZ$

циальной линии (показана пунктиром), а точки  $B'$  и  $B$  — на одной линии тока, проходящей вдоль границы образца. Интеграл по участку контура  $d\mathbf{l}$  вдоль линии тока, где поле  $\mathbf{E}_H$  перпендикулярно  $d\mathbf{l}$ , равен нулю:

$\int\limits_{B'}^B \mathbf{E}_H d\mathbf{l} = 0$ . Поскольку поле  $\mathbf{E}_H$  — потенциальное, то  $\int\limits_B^D \mathbf{E}_H d\mathbf{s}$  не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки  $B$  и  $D$ . Следовательно,

напряжение Холла  $U_H = \int\limits_B^D \mathbf{E}_H d\mathbf{s} = \int\limits_B^{B'} \mathbf{E}_H d\mathbf{l} + \int\limits_{B'}^D \mathbf{E}_H d\mathbf{n} = \int\limits_{B'}^D \mathbf{E}_H d\mathbf{n}$ , где  $d\mathbf{s}$  —

элемент длины между точками  $B$  и  $D$ ;  $d\mathbf{n} = (-dy, dx)$  — нормаль к  $d\mathbf{l} = (dx, dy)$ .

Напряжение Холла между точками  $B$  и  $D$  (потенциальными зондами)

равно  $U_H = \Delta U_{BD} = R_H I_{AC} B_z / t$ , где ток  $I_{AC} = t \int_{B'}^D \mathbf{J} d\mathbf{n}$ . Для холловского

сопротивления имеем:

$$\Delta R_{AC,BD} = \frac{\Delta U_{BD}}{I_{AC}} = \frac{R_H B_z}{t}. \quad (7)$$

Решая (7) относительно  $R_H$ , получаем (6).

Холловская подвижность основных носителей заряда в плоской пленке толщиной  $t$  есть  $\mu_H = R_H / \rho = t \Delta R_{AC,BD} / B_z \rho$ , где  $\Delta R_{AC,BD}$  — изменение сопротивления  $R_{AC,BD} = U_{BD} / I_{AC}$ , обусловленное перпендикулярным поверхности пленки внешним магнитным полем  $B_z$ .

Замечание 4. В отсутствие внешнего магнитного поля контакты  $B$  и  $D$  обычно размещают так, чтобы  $U_{BD} = U_B - U_D = 0$  при  $I_{AC} \neq 0$ ; точки  $B$  и  $D$  лежат на эквипотенциали и  $R_{AC,BD} = 0$ . Этого можно добиться, формируя скрайбера сквозные прорези по краям плоского образца. При включении внешнего магнитного поля между контактами  $B$  и  $D$  возникает э.д.с. -Холла  $U_H = \Delta U_{BD}$ .

## 5. Алгоритм измерения удельного электрического сопротивления кристаллического кремния четырехзондовым методом

Методика предназначена для измерения удельного электрического сопротивления  $\rho$  от  $10^{-3}$  до  $10^3$  Ом·см при температуре  $T \approx 300$  К. Ниже перечислены стандартные условия и средства измерения  $\rho$  монокристаллических слитков Si, выращенных по методу Чохральского.

### 5.1. Сущность метода

Метод основан на расчете удельного электрического сопротивления по измерению разности потенциалов в двух точках, расположенных на плоской поверхности, при пропускании через два точечных контакта, расположенных на той же поверхности, электрического тока определенной величины.

### 5.2. Аппаратура, средства измерения и материалы

Блок-схема установки для измерения удельного электрического сопротивления приведена на рис. 9. Сопротивление изоляции монтажа и всех установочных приспособлений не должно быть ниже требуемого входного сопротивления вольтметра (см. табл. 3).

### 5.3. Требования к применяемым средствам измерения

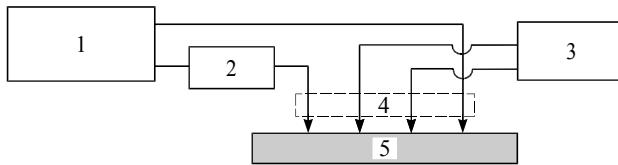


Рис. 9. Блок-схема установки для измерения удельного электрического сопротивления: 1 — источник постоянного тока изменяемой полярности, 2 — устройство для измерения силы и направления тока, 3 — устройство для измерения разности электрических потенциалов, 4 — четырехзондовая головка, 5 — полупроводниковый образец с плоской поверхностью

5.3.1. Измерительная четырехзондовая головка с четырьмя линейно расположенными зондами из карбида вольфрама;

стандартное межзондовое расстояние  $s = (1,30 \pm 0,01)$  мм,

максимальный линейный размер рабочей площадки зонда — не более 60 мкм.

Сила прижима зонда к слитку кремния  $\approx 1$  Н.

5.3.2. Источник постоянного тока, обеспечивающий получение токов изменяемой полярности в диапазонах, соответствующих назначению установки.

Допустимые отклонения электрического тока за время измерения — не более  $\pm 0,5$  % от его средней величины. Предельные значения рабочих токов при  $T \approx 300$  К и измеряемых напряжений в зависимости от величины удельного электрического сопротивления Si приведены в табл. 3.

Таблица 3

Верхний предел измеряемого удельного электрического сопротивления $\rho$ , Ом·см	Верхний предел силы тока $I$ , А	Верхний предел измеряемого напряжения $U$ , В	Входное сопротивление вольтметра $R_i$ , Ом, не менее
$10^{-3}$	$10^{-1}$	$10^{-4}$	$10^3$
$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^4$
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^5$
1	$8 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^6$
$10^1$	$8 \cdot 10^{-3}$	$10^{-1}$	$10^7$
$10^2$	$8 \cdot 10^{-4}$	$10^{-1}$	$10^8$
$10^3$	$8 \cdot 10^{-5}$	$10^{-1}$	$2 \cdot 10^8$

5.4. Условия проведения измерений

5.4.1. Измерение удельного электрического сопротивления проводят на кремниевых образцах, имеющих во всех точках одинаковый тип электрической проводимости.

5.4.2. Измерения проводят на плоских поверхностях, имеющих шероховатость не более 2,5 мкм.

5.4.3. При проведении измерений расстояние между краем образца и ближайшим к нему зондом должно быть не менее 5 мм при  $s = 1,3$  мм.

5.4.4. Стандартные измерения проводят при фиксированной температуре  $(23 \pm 2)$  °C. Температуру образца доводят до  $(23 \pm 2)$  °C, выдерживая его не менее 1 ч при указанной температуре.

5.4.5. Измерение образцов кристаллического кремния с  $\rho \geq 10^2$  Ом·см необходимо проводить при затемнении. Для удельного электрического сопротивления  $\rho < 10^2$  Ом·см при измерении допускается освещенность образца рассеянным белым светом не более 500 лк.

## 5.5. Выполнение измерений

5.5.1. На подготовленную поверхность образца, установленного в держателе, опускают без удара зонды измерительной головки, перпендикулярно к поверхности.

5.5.2. Устанавливают величину тока, через образец (см. табл. 3) и проводят измерение разности электрических потенциалов между внутренними зондами при двух полярностях тока.

## 5.6. Обработка экспериментальных данных

Удельное электрическое сопротивление ( $\rho$ ), Ом·см, для толстого плоского образца ( $t \gg s$ ) вычисляют по формуле

$$\rho = \frac{U}{I} 2\pi s, \quad (1)$$

где  $s$  — расстояние между зондами измерительной головки.

Удельное электрическое сопротивление ( $\rho$ ), Ом·см, для тонкого плоского образца ( $t \ll s$ ) вычисляют по формуле

$$\rho = \frac{U}{I} \frac{\pi}{\ln 2} t = t R_{\square}, \quad (2)$$

где  $t$  — эффективная толщина полупроводниковой пленки на изолирующей подложке,  $R_{\square}$  — поверхностное электрическое сопротивление.

## 5.7. Представление результатов измерений

### 5.7.1. Результатом измерения удельного электрического сопротивле-

ния ( $\rho$ ) является величина, вычисленная по формулам (1) и (2).

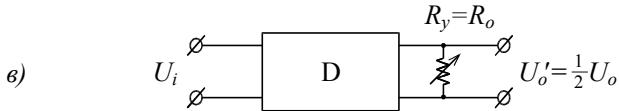
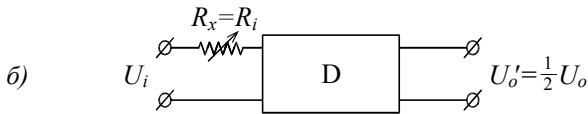
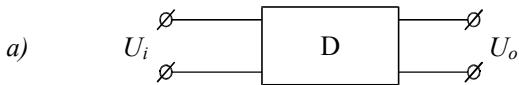
5.7.2. Результат измерения  $\rho$  характеризуется погрешностью  $\pm 5\%$ , если измерения при двух полярностях тока различаются не более чем на величину установленной на практике случайной погрешности ( $\pm 2\%$ ).

5.7.3. Результаты измерений выражают трехзначным числом, если первой цифрой являются 1, 2, 3 и двузначным, если первая цифра больше трех.

Замечание 5. Электрическое сопротивление контакта металлический зонд—полупроводник не только ограничивает протекающий ток, но, как правило, нестабильно во времени, что затрудняет проведение измерений. Для уменьшения влияния инжекции носителей заряда и получения малых контактных сопротивлений зондов с поверхностью полупроводникового образца, на котором производят измерения, ее механически обрабатывают (например, шлифуют). Однако подобная обработка, особенно для высокоомных образцов, иногда недостаточна. Поэтому нередко контакты подвергают электрической формовке.

Замечание 6. Минимальное возможное значение постоянного тока при измерении удельного сопротивления  $\rho$  определяется чувствительностью регистрирующих приборов, максимальное — степенью разогрева образцов. Чем большее  $\rho$ , тем меньший допустимый ток  $I$ . Разогрев может приводить к погрешностям в измерениях, обусловленным с одной стороны, изменением сопротивления образца, а с другой — возникновением при неоднородном разогреве паразитных термо -э.д.с. Теплота разогрева (по Джоулю-Ленцу) пропорциональна  $I^2 \rho$ , поэтому протекающий через образец ток сильнее разогревает высокоомную часть, чем низкоомную, и в нем возникает градиент температуры и связанное с ним термоэлектрическое поле. Измеряемое между зондами напряжение  $U_+ = U + U_t$ , где  $U$  — омическое падение напряжения (разность электрических потенциалов) между зондами;  $U_t$  — паразитная термо -э.д.с. С изменением направления тока на противоположное знак  $U$  изменится, а знак термо -э.д.с.  $U_t$  останется прежним, поскольку разогрев пропорционален  $I^2$  и для противоположного направления тока  $U_- = -U + U_t$ . Полезный сигнал  $U = (U_+ - U_-)/2$ . Итак, измерения при двух направлениях протекающего через образец тока исключают влияние паразитных термо -э.д.с., обусловленных неоднородным разогревом, независимо от закона изменения удельного сопротивления вдоль образца. Однако градиент температуры в образце может возникнуть за счет эффекта Пельтье в местах контактов токовых металлических зондов с полупроводниковым образцом. Этот градиент, как и омическое падение напряжения  $U$ , линейно зависит от протекающего через образец тока.

Замечание 7. Входное  $R_i$  и выходное  $R_o$  активные сопротивления измерительного прибора D (вольтметра, амперметра, усилителя), который при подаче на его входные клеммы напряжения постоянного тока  $U_i$  дает на выходных клеммах напряжение  $U_o$ , определяются по схемам  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Если последовательно включить переменный резистор на вход прибора D, то величина  $R_x$ , при ко-



торой  $U'_o = 0,5 U_o$ , равна входному сопротивлению  $R_i$ . Если на выход прибора параллельно подключить резистор  $R_y = R_o$ , то выходное напряжение уменьшается вдвое. Какие действия нужно произвести, чтобы определить входную и выходную емкости прибора D?

## 6. Задания и отчет о лабораторной работе

6.1. Собрать установку для измерения удельного сопротивления по блок-схеме, представленной на рис. 9. Определить межзондовое расстояние  $s$  при размещении четырех зондов вдоль прямой линии, диаметр контактной площадки и силу прижима зонда к образцу кристаллического Si.

6.2. Установить величину тока. Провести измерения разности электрических потенциалов на плоской поверхности слитка и эпитаксиального слоя кристаллического кремния. Измерения выполнить на трех кристаллографических плоскостях одного слитка Si и в трех направлениях на поверхности эпитаксиальной пленки. Показать, что электрическая проводимость кремния является изотропной величиной.

6.3. Выполнить необходимые расчеты для определения удельного  $\rho$  и поверхностного  $R_{\square}$  электрического сопротивления Si. Решить задачи (см. выше; п. 1).

6.4. Заполнить паспорт эксперимента.

## ПАСПОРТ ЭКСПЕРИМЕНТА

“Измерение удельного и поверхностного электрического сопротивления кристаллического кремния четырехзондовым методом”

Исходные данные:

Дата, время	
Температура $T$ , К	
Объект(ы) исследования	
Относительная диэлектрическая проницаемость $c$ -Si, $\epsilon_s$	
Относительная диэлектрическая проницаемость $a$ -SiO <sub>2</sub> , $\epsilon_{ox}$	
Освещенность образца рассеянным белым светом, лк	
Входное сопротивление вольтметра $R_i$ , МОм	

Измеренные и рассчитанные величины:

Толщина проводящего слоя кремния $t$ , мкм	
Расстояние между зондами $s$ , мм	
Сила тока $I$ , мА	
Напряжение (разность потенциалов) $U$ , В	
Поверхностное сопротивление $R_{\square}$ , Ом/□	
Удельное сопротивление $\rho$ , Ом·см	
Погрешность измерения $\rho$ , %	
Задача №1; $U$ , мВ	
Задача №2; $RC$ , нс	
Задача №3; $W, L$ , мкм	

Студент \_\_\_\_\_

Преподаватель \_\_\_\_\_

## Приложение 1. Система координат в слитках монокристаллического Si

Все многообразие кристаллических структур можно описать с помощью 14 типов решеток Браве, подразделяющихся на 7 кристаллографических систем (сингоний).

Для выбора (по Браве) элементарной ячейки кристалла используют три условия:

- 1) симметрия элементарной ячейки должна соответствовать симметрии кристалла, точнее, наиболее высокой симметрии (т. е. голоэдрии) той сингонии, к которой относится кристалл; ребра элементарной ячейки должны быть трансляциями решетки;
- 2) элементарная ячейка должна содержать максимально возможное число прямых углов или равных углов и равных ребер;
- 3) элементарная ячейка должна иметь минимальный объем.

Эти условия должны выполняться последовательно, т. е. при выборе ячейки первое условие важнее второго, а второе — третьего.

Кристаллы кремния, германия, алмаза, GaAs, InSb и др. относятся к кубической сингонии. Расстояние в кристалле кубической сингонии измеряют в единицах длины ребра элементарной ячейки  $a$ ; координатные оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  — ортогональны. Кристаллическая решетка алмаза (а также Si, Ge, а -Sn) является гранецентрированной кубической решеткой Браве, каждому узлу которой сопоставлены два атома углерода. В кристаллическом кремнии ( $c$  -Si) при  $T \approx 300$  К расстояние между двумя соседними атомами равно  $a\sqrt{3}/4 = 0,2352$  нм; ребро куба (постоянная решетки)  $a = 0,5431$  нм. На кристаллографическую элементарную ячейку, отражающую трансляционную и точечную симметрию решетки Si, приходится восемь атомов.

Положение и ориентация воображаемой атомной плоскости кристалла определяется заданием координат трех атомов, лежащих в этой плоскости. Любая атомная плоскость в кристалле может быть задана “уравнением в отрезках”

$$\frac{x}{sa} + \frac{y}{ta} + \frac{z}{va} = 1, \quad (1)$$

где  $a$  — постоянная решетки;  $s$ ,  $t$ ,  $v$  — целые числа (исключая ноль); величины  $sa$ ,  $ta$  и  $va$  равны отрезкам, отсекаемым плоскостью от осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  соответственно, с учетом направления. Если обозначить  $h = 1/s$ ,  $k = 1/t$ ,  $l = 1/v$ , то из (1) следует уравнение атомной плоскости с так называемыми индексами Миллера ( $hkl$ ) в виде

$$h\frac{x}{a} + k\frac{y}{a} + l\frac{z}{a} = 1. \quad (2)$$

Индексы Миллера определяются следующим образом:

1) положение любого атома выбирают за начало координат [[000]], от которого проводят координатные оси в направлениях основных векторов трансляций; в кубических кристаллах эти оси совпадают с осями декартовой системы координат *OXYZ* (см. рис. 1);

2) точки пересечения атомной плоскости с координатными осями выражают целыми числами в единицах длин векторов трансляций; для кубических кристаллов единицей длины является постоянная решетки *a*;

3) величины, обратные этим целым числам, умножают на их минимальный общий знаменатель, получая простейшее отношение целых чисел.

Индексы Миллера задаются целыми числами, пишутся подряд, без запятых, читаются порознь. Например, (102) читается “один, ноль, два”. Плоскость (1 1/2 0) эквивалентна (параллельна) плоскости (210).

Если плоскость параллельна какой-либо координатной оси, то индекс Миллера, соответствующий этой координатной оси, равен нулю. Например, если точки пересечения таковы: 1 на оси *OX*, -2 (минус два) на оси *OY* и бесконечность на оси *OZ*, то набор обратных будет 1, -1/2, 0, а набор наименьших целых (2 $\bar{1}$ 0), где  $\bar{1} = -1$  означает пересечение с отрицательной полуосью *OY*. Подобные плоскости, такие как (100), (010), (0 $\bar{1}$ 0), обозначаются через {001}.

Кристаллографическое направление — это направление прямой, проходящей по крайней мере через два атома элементарной ячейки. Символ направления пишется в квадратных скобках [hkl]. В кубических кристаллах направления нормалей к плоскостям (hkl) имеют вид [hkl], т. е. нормали к атомным плоскостям выражаются через индексы Миллера плоскостей (доказательство см. ниже). Направления кристаллографических осей координат в кристаллах кубической сингонии имеют индексы: ось *OX* — [100], ось *OY* — [010], ось *OZ* — [001]. Отрицательные значения координат обозначаются чертой над соответствующим индексом, например, ось (-*OX*) — [ $\bar{1}$ 00], ось (-*OY*) — [0 $\bar{1}$ 0], ось (-*OZ*) — [00 $\bar{1}$ ]. Плоскость (111) имеет направление [111]. Его можно записать как [1/2 1/2 1/2] или [222], но принято писать наименьшее целое представление. Для таких плоскостей, как (100) и (010), направлениями нормалей будут [100] и [010]; их обозначают {001}. Плоскости граней кристалла кубической сингонии имеют индексы (100), (010),

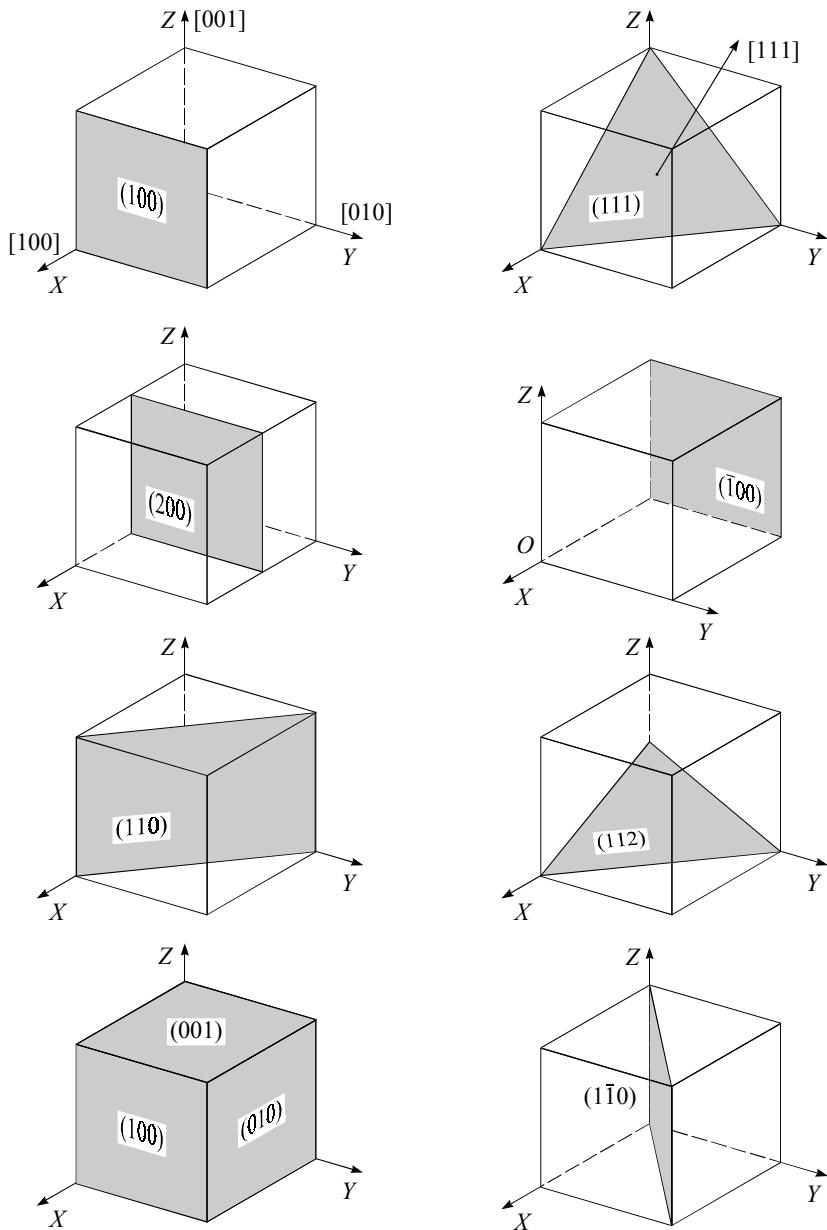


Рис. 1. Основные плоскости кристаллов кубической сингонии

$(001)$ ,  $(\bar{1}00)$ ,  $(0\bar{1}0)$  и  $(00\bar{1})$ . Плоскость  $(200)$  — это плоскость, параллельная плоскости  $(100)$ , но отсекающая на оси  $OX$  отрезок, вдвое меньший, чем плоскость  $(100)$ . Плоскость  $(111)$  проходит через три вершины куба с координатами  $[[100]]$ ,  $[[010]]$  и  $[[001]]$ , а кристаллографическое направление  $[111]$  (перпендикуляр к плоскости  $(111)$ ) является пространственной диагональю куба, т. е. соединяет начало координат  $[[000]]$  и вершину куба (гексаэдра) с координатой  $[[111]]$ .

Индексы направления нормали к плоскости пропорциональны соответствующим косинусам углов между нормальным вектором к плоскости и осями координат (см. рис. 2). Покажем это.

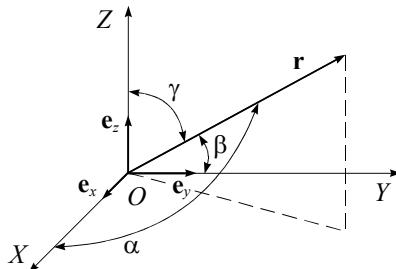


Рис. 2. Направляющие косинусы вектора  $\mathbf{r}$

Пусть вектор  $\mathbf{r}$  имеет направление, задаваемое единичным вектором  $\mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma$ , где  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  — единичные векторы осей координат. Допустим, что  $|\mathbf{r}| = d$ , где  $d$  — расстояние между началом координат  $[[000]]$  и плоскостью  $(hkl)$ . Тогда

$$\mathbf{r} = d(\mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma). \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\cos \alpha = \frac{d}{a/h}, \cos \beta = \frac{d}{a/k}, \cos \gamma = \frac{d}{a/l}, \quad (4)$$

где  $a/h$  — координата пересечения плоскости  $(hkl)$  с осью  $OX$ ,  $a/k$  — координата пересечения плоскости с осью  $OY$ ,  $a/l$  — координата пересечения плоскости с осью  $OZ$ . Из (3) и (4) имеем

$$\mathbf{r} = d \left( \mathbf{e}_x \frac{hd}{a} + \mathbf{e}_y \frac{kd}{a} + \mathbf{e}_z \frac{ld}{a} \right); |\mathbf{r}| = d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}. \quad (5)$$

Подставляя  $d$  из (5) в (4), получаем

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}, \cos \beta = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}, \cos \gamma = \frac{l}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}, \quad (6)$$

т. е. направление вектора  $\mathbf{r}$ , нормального к плоскости  $(hkl)$ , можно за-

дать в виде  $[hkl]$ .

Для кубических кристаллов угол  $\theta$  между двумя плоскостями  $(h_1 k_1 l_1)$  и  $(h_2 k_2 l_2)$  есть угол между их нормальными векторами  $[h_1 k_1 l_1]$  и  $[h_2 k_2 l_2]$ . Иначе, если  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — нормальные векторы двух плоскостей, то  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = d_1 d_2 \cos \theta$ . Из (3) с учетом (6) имеем

$$\cos \theta = \frac{h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2}{\left[ (h_1^2 + k_1^2 + l_1^2)(h_2^2 + k_2^2 + l_2^2) \right]^{1/2}}. \quad (7)$$

Слитки кремния, выращенные методом Чохральского, имеют форму цилиндра. На рис. 3 изображены два слитка с направлением роста  $[001]$  и  $[111]$ . Внутрь слитков помещены системы координат, связанные с соответствующими кристаллографическими направлениями. Согласно формуле (7) угол между направлениями  $[1\bar{1}0]$  и  $[100]$  составляет  $45^\circ$ . По бокам цилиндрических слитков показаны также базовые срезы и кристаллографические направления, перпендикулярные к ним. Базовый срез делают (шлифовкой слитка по образующей цилиндра) для задания определенной ориентации, дополнительные срезы — для идентификации типа легирующей примеси и удельного электрического сопротивления (при комнатной температуре в отсутствие актиничного излучения).

Замечание 8. Нормали плоскостей. Если на плоскости задан вектор  $\mathbf{P}_0 \mathbf{P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , где  $P_0(x_0, y_0, z_0) \equiv P(\mathbf{r}_0)$ ,  $P(x, y, z) \equiv P(\mathbf{r})$  — две произвольные точки и перпендикулярный плоскости вектор нормали  $\mathbf{n} = (A, B, C)$ , то условие перпендикулярности  $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}$  и  $\mathbf{n}$  дает уравнение плоскости  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz + D = 0$ . Уравнение прямой, проходящей через точки  $Q_0$  и  $Q$  с направляющим вектором  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , имеет вид  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ , где  $t$  — переменная величина (параметр),  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  — радиусы-векторы точек  $Q$  и  $Q_0$ . Тогда равенство  $A/a_1 = B/a_2 = C/a_3$  означает, что векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{a}$  коллинеарны, т. е. прямая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$  и плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$  перпендикулярны. У кубических кристаллов плоскости имеют такие же индексы Миллера, как и нормали. Например,  $[312] \perp (312)$ . Пересечение плоскостей. Линия пересечения  $[h k l]$  двух плоскостей  $(h_1 k_1 l_1)$  и  $(h_2 k_2 l_2)$  может быть определена путем вычисления векторного произведения нормалей к этим плоскостям:  $h = k_1 l_2 - l_1 k_2$ ,  $k = l_1 h_2 - h_1 l_2$ ,  $l = h_1 k_2 - k_1 h_2$ . Таким образом, направления линии пересечения плоскостей  $(112)$  и  $(111)$  будут  $[\bar{1}10]$  или  $[1\bar{1}0]$ . Направления в плоскости. Скалярное произведение направления  $[h_1 k_1 l_1]$  и вектора нормали  $[h_2 k_2 l_2]$  к плоскости  $(h_2 k_2 l_2)$  равно нулю, если это направление лежит в плоскости  $(h_2 k_2 l_2)$ . Следовательно, из формулы (7) имеем  $h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2 = 0$ . Так, например, плоскости  $(111)$  среди множества других содержит следующие направления:  $[1\bar{1}2]$ ,  $[\bar{1}01]$ ,  $[3\bar{1}2]$ .

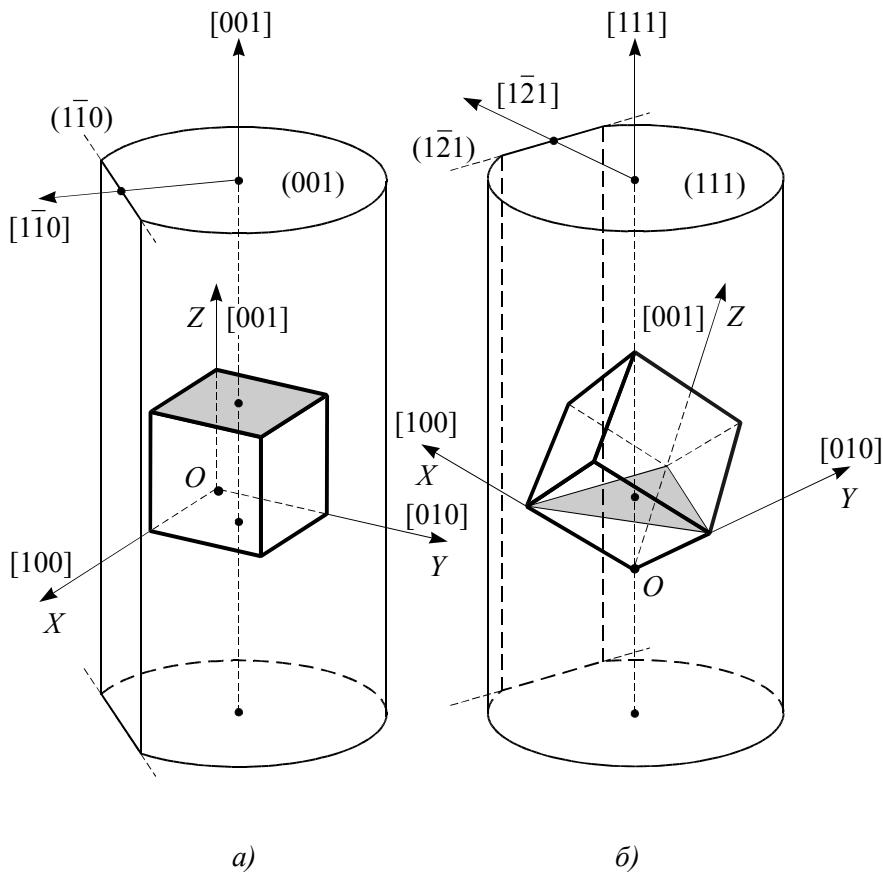


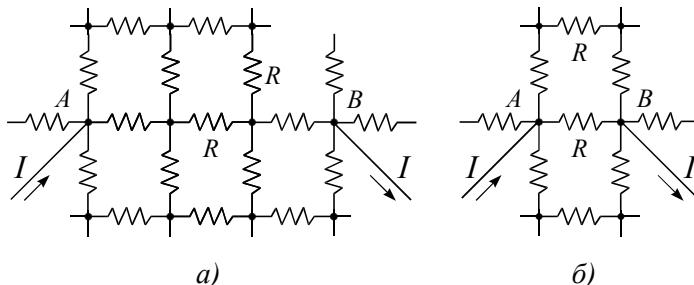
Рис. 3. Монокристаллические слитки кремния со “встроеннымными” системами координат *OXYZ* и базовыми срезами: *а*) слиток с осью роста  $[001]$  и базовым срезом, параллельным плоскости  $(1\bar{1}0)$ ; *б*) слиток с осью роста  $[111]$  и базовым срезом, параллельным плоскости  $(1\bar{2}1)$

## Приложение 2. Резистивная сеть. Приближение эффективной среды

В неоднородно легированных полупроводниковых кристаллах проекание зарядов (тока) от одного электрода к другому определяется “геометрией беспорядка”. Ниже дается элементарное введение в эту проблему.

Рассмотрим “бесконечную” трехмерную электрическую цепь (сеть) из резисторов одинакового сопротивления  $R$ . В одном узле сети соединяются  $v$  резисторов, т. е. каждый узел имеет ровно  $v$  резистивных связей с наиближайшими узлами.

На рис. *а* и *б* показаны фрагменты двухмерных электрических сетей,



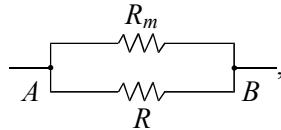
используемых при вычислении напряжения на резисторе  $R$ , окруженном регулярной резистивной средой.

Если в произвольной узел  $A$  втекает ток  $I$ , то он растекается по  $v$  связям. Если из узла  $B$  вытекает ток  $I$ , то он также подходит к этому узлу сети по  $v$  связям (рис. *а*).

Представим ток в сети на рис. *б* как сумму двух вкладов: 1) тока  $I$ , втекающего в узел  $A$  и вытекающего (во всех направлениях) на бесконечности; 2) тока  $I$ , втекающего на бесконечности и вытекающего в узле  $B$ . Тогда ток, протекающий через каждую из  $v$  эквивалентных резистивных связей, равен  $I/v$  в узле входа ( $A$ ) и  $I/v$  в узле выхода ( $B$ ). Таким образом, полный ток, текущий через связь  $AB$ , равен  $2I/v$ . Это определяет электрическое напряжение  $U_{AB}$  между узлами  $A$  и  $B$ . Если выделить два соседних узла (рис. *б*), то по резистору  $R$  течет ток  $2I/v$ ; измеренное между узлами  $A$  и  $B$  сопротивление

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{2IR}{Iv} = \frac{2R}{v}. \quad (1)$$

Если рис. *б* представить в виде



то сопротивление между  $A$  и  $B$  есть

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_m}, \quad (2)$$

где  $R_m$  — означает совокупное сопротивление оставшейся части сети.

Из (1) и (2) имеем

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_{AB}} - \frac{1}{R} = \frac{v}{2R} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \left( \frac{v}{2} - 1 \right). \quad (3)$$

Пусть теперь между  $A$  и  $B$  (рис. 6) вместо  $R$  включено случайное сопротивление  $R_i$ . Тогда по (2) и (3) сопротивление между узлами  $A$  и  $B$  есть

$$\frac{1}{R_{AB}^{(i)}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R} \left( \frac{v}{2} - 1 \right). \quad (4)$$

В приближении эффективной среды предполагается, что среднее по сети значение электрического сопротивления между двумя соседними узлами есть

$$\langle R_{AB}^{(i)} \rangle = 2R/v, \quad (5)$$

т. е. если заменить все  $R$  случайными величинами  $R_i$  со средним значением  $\langle 1/R_i \rangle = 1/R$ , то возникающие при этом дополнительные напряжения (локальные электрические поля) при усреднении должны обра-титься в нуль. Иными словами, полное поле внутри эффективной сре-ды равно внешнему полю. Такая среда должна быть макроскопически однородной.

Если сеть состоит из резисторов двух номиналов, то из (5) получаем

$$P_1 \cdot R_{AB}^{(1)} + P_2 \cdot R_{AB}^{(2)} = \frac{2R}{v}, \quad (6)$$

где  $P_i$  — вероятность того, что  $i$ -ый резистор имеет сопротивление  $R_{AB}^{(i)}$ ; сумма вероятностей несовместных событий  $P_1 + P_2 = 1$ .

Выражение (6) перепишем в виде

$$\frac{2R}{v} = \frac{P_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \left( \frac{v}{2} - 1 \right)} + \frac{P_2}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} \left( \frac{v}{2} - 1 \right)}. \quad (7)$$

Для  $v = 6$  (резисторы связывают ближайшие соседние узлы простой кубической решетки) из (7) имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{a_2}{R_1} + \frac{a_1}{R_2} + \left( \left( \frac{a_2}{R_1} + \frac{a_1}{R_2} \right)^2 + \frac{1}{2R_1 R_2} \right)^{1/2},$$

$$\text{где } a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} P_1 \right), \quad a_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} P_2 \right).$$

### Приложение 3. Конформное преобразование плоскопараллельного электростатического поля

#### 3.1. Общие сведения о конформных преобразованиях (отображениях)

Непосредственный расчет электростатического потенциала  $\Phi(x, y)$  двухмерного плоскопараллельного поля из уравнения Лапласа ( $\partial^2 \Phi / \partial^2 x + \partial^2 \Phi / \partial^2 y = 0$ ) в области  $D$  сложной формы на плоскости  $XY$  является достаточно трудной задачей. Иногда решение задачи упрощают следующим образом. Строят отображение  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  области  $D$  плоскости  $XY$  на область  $G$  плоскости  $UV$ , где получают более простое поле. При этом требуется, чтобы данное отображение было конформным, т. е., чтобы любая бесконечно малая фигура на плоскости  $XY$  переходила в подобную бесконечно малую фигуру на плоскости  $UV$  (см. ниже).

Для осуществления конформного отображения используются функции комплексного переменного  $w = w(z) = w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Плоскость  $XY$  рассматривается как комплексная плоскость  $Z$  с действительной осью  $OX$  и мнимой  $OY$ , а плоскость  $UV$  — как комплексная плоскость  $W$  с действительной осью  $OU$  и мнимой  $OV$ . Для того, чтобы преобразование было конформным необходимо и достаточно, чтобы отображающая функция  $w(z)$  была аналитической, а производная  $dw/dz$  внутри области  $D$  плоскости  $Z$  нигде не обращалась в нуль.

Функция  $w(z)$  комплексного переменного  $z$  называется аналитической в некоторой области  $D$ , если она: 1) однозначна в этой области, 2) конечна, 3) в любой точке области  $D$  существует производная

$dw(z)/dz = w'(z) \neq 0$ . Из условия 3) аналитичности  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  следуют соотношения Коши-Римана:  $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ ,  $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ .

Отметим, что при конформном преобразовании плоскопараллельного электростатического поля остаются неизменными потенциал, суммарные заряды сосредоточенные на электродах, емкости электродов и общая энергия поля. Конфигурация и линейные размеры электродов, напряженность поля и плотность зарядов на электродах меняются.

### 3.2. Свойства комплексного потенциала

Комплексным потенциалом называют комплексную функцию  $w(z) = w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , которая описывает совокупность силовых, например  $v(x, y) = \text{const}$ , и эквипотенциальных, например  $u(x, y) = \text{const}$ , линий плоскопараллельного двухмерного постоянного тока. С помощью функции  $w(z)$  осуществляется преобразование поля с плоскости  $Z(x, y)$  на плоскость  $W(u, v)$ , где картина поля упрощается. Знание комплексного потенциала позволяет получить картину поля и все величины, характеризующие исследуемое поле, — напряженность, энергию, емкость, индуктивность и др.

Комплексный потенциал является аналитической и гармонической функцией в заданной области.

Линии уровня вещественной  $u(x, y)$  и мнимой  $v(x, y)$  частей комплексного потенциала ортогональны.

В каждой точке заданной области необходимо и достаточно, чтобы комплексный потенциал был однозначной функцией, имея конечную производную, которая не должна обращаться в нуль. Комплексный потенциал  $w(z)$ , а также его вещественная  $u(x, y)$  и мнимая  $v(x, y)$  части, удовлетворяют уравнению Лапласа  $\nabla^2 w = \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$ .

Они образуют ортогональную сетку на плоскости  $W$ , поэтому в зависимости от задачи одну из частей комплексного потенциала, например мнимую часть, можно считать потенциальной функцией, а вещественную представить как поток вектора напряженности поля (или наоборот). Тогда уравнения  $u(x, y) = \text{const}$  и  $v(x, y) = \text{const}$  — это уравнения эквипотенциалей и силовых линий (или наоборот).

### 3.3. Методы конформного преобразования

Определение плоскопараллельного поля, создаваемого двумя электродами известной формы (эквипотенциальные поверхности), методом конформного преобразования сводится к отысканию такой функции

$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , с помощью которой можно осуществить конформное отображение области  $D$  на плоскости  $Z$  с искомым комплексным потенциалом на область  $G$  плоскости  $W$  с известным комплексным потенциалом (или на плоскости  $W$  комплексный потенциал легко рассчитать). При этом одна из частей функции  $w(z)$ , например действительная, должна удовлетворять уравнению  $u(x, y) = \text{const}$  на поверхности электродов. Общего метода нахождения функции  $w(z)$  для любой формы электродов нет.

### 3.4. Введение в теорию конформных отображений

Взаимно однозначное отображение области  $D$  комплексной плоскости  $Z$  на область  $G$  комплексной плоскости  $W$  называется конформным, если это отображение во всех точках  $z \in D$  обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Подчеркнем, что определение конформного отображения подразумевает непрерывность отображения. При конформном отображении области  $D$  на область  $G$  бесконечно малые плоские фигуры области  $D$  преобразуются в подобные им бесконечно малые фигуры области  $G$ .

Имеет место следующая теорема. Пусть функция  $w(z)$  является однозначной и однолистной (существует однозначная обратная функция для  $w(z)$ ) аналитической функцией в области  $D$  и  $w'(z) \neq 0$  при  $z \in D$ . Тогда функция  $w(z)$  производит конформное отображение области  $D$  на область  $G$ .

Условия, гарантирующие существование и единственность отображения, т. е. что существует функция  $w(z)$ , осуществляющая конформное отображение данной области  $D$  комплексной плоскости  $Z$  на заданную область  $G$  комплексной плоскости  $W$ , дает великая теорема Римана. Всякую односвязную область  $D$  комплексной плоскости  $Z$ , граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга  $|w| < 1$  комплексной плоскости  $W$ . Доказательство теоремы Римана выходит за рамки общих курсов теории аналитических функций.

3.4.1. При конформном отображении области  $D$  на область  $G$  часто полезными бывают принципы *а)* и *б)*.

#### *а)* Принцип соответствия границ

При решении задач конформного отображения заданной области  $D$  на заданную область  $G$  обычно следят лишь за тем, чтобы искомая функция  $w(z)$  производила отображение границы  $\gamma$  области  $D$  на границу  $\Gamma$  области  $G$ , не рассматривая специально отображения внутренних точек. Это можно делать в силу так называемого принципа соответствия

границ.

Предварительно сделаем следующее замечание. Пусть в области  $D$  на плоскости  $Z$  задана однозначная непрерывная функция  $w = w(z)$ . Очевидно, эта функция переводит любую замкнутую кривую  $\gamma$ , целиком лежащую в области  $D$ , также в замкнутую кривую  $\Gamma$ , целиком лежащую в области  $G$  на плоскости  $W$ . Считаем, что при отображении кривой  $\gamma$ , осуществляя функцией  $w(z)$ , сохраняется направление обхода, если при непрерывном движении точки в положительном направлении вдоль кривой  $\gamma$  соответствующая ей точка обходит кривую  $\Gamma$  также в положительном направлении.

Принцип соответствия границ может быть сформулирован в виде теоремы. Пусть в конечной области  $D$ , ограниченной контуром  $\gamma$  на комплексной плоскости  $Z$ , задана однозначная аналитическая функция  $w(z)$ , непрерывная в  $D$ , осуществляющая взаимно однозначное отображение контура  $\gamma$  на некоторый контур  $\Gamma$  комплексной плоскости  $W$ . Тогда, если при данном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция  $w(z)$  осуществляет конформное отображение области  $D$ , на внутреннюю область  $G$ , ограниченную контуром  $\Gamma$ .

### б) Принцип симметрии

Этот принцип применяется при решении задач конформного отображения областей, границы которых имеют прямолинейные участки.

Пусть граница  $\gamma$  области  $D$  имеет прямолинейный участок  $\gamma_s$  (см. рис. 1). Область  $\tilde{D}$ , полученную путем зеркального отображения обла-

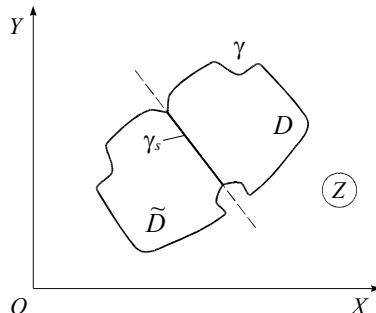


Рис. 1. Зеркальное отражение области  $D$  относительно прямолинейного участка  $\gamma_s$  контура  $\gamma$

сти  $D$  относительно прямой, на которой лежит отрезок  $\gamma_s$ , будем называть областью, симметричной области  $D$  относительно  $\gamma_s$ .

Принцип симметрии может быть сформулирован в виде теоремы. Пусть в замкнутой области  $D$  (комплексной плоскости  $Z$ ), граница  $\gamma$  которой имеет прямолинейный участок  $\gamma_s$ , задана непрерывная функ-

ция  $w(z)$ , осуществляющая конформное отображение области  $D$  на область  $G$  (комплексной плоскости  $W$ ), при котором участок  $\gamma_s$  границы  $\gamma$  переходит также в прямолинейный участок  $\Gamma_s$  границы  $\Gamma$  области  $G$ . Тогда в области  $\tilde{G}$ , симметричной  $G$  относительно отрезка  $\Gamma_s$ , можно построить функцию  $\tilde{w}(z)$ , являющуюся аналитическим продолжением функции  $w(z)$  из области  $D$  в область  $\tilde{D}$ , осуществляющую конформное отображение области  $\tilde{D}$  плоскости  $Z$  на область  $\tilde{G}$  плоскости  $W$ , симметричную области  $G$  относительно отрезка  $\Gamma_s$ .

### 3.4.2. Сохранение оператора Лапласа при конформном отображении

Пусть в области  $D$  плоскости  $XY$  задана гармоническая функция  $u(x, y)$ , т. е.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (x, y) \in D. \quad (1)$$

С помощью невырожденного преобразования независимых переменных

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (2)$$

где якобиан  $\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y) \neq 0$  для  $(x, y) \in D$ , отобразим область  $D$  плоскости  $XY$  на область  $F$  плоскости  $\Xi\text{H}$ . Заметим, что задание двух действительных функций (2) эквивалентно заданию в области  $D$  комплексной плоскости  $XY$  одной функции  $w(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$  комплексной переменной  $z = x + iy$ . При этом функция  $w(z)$  осуществляет отображение области  $D$  комплексной плоскости  $XY$  на область  $F$  комплексной плоскости  $\Xi\text{H}$ . В силу условия  $\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y) \neq 0$  уравнения (2) однозначно разрешимы относительно переменных  $(x, y)$ , и тем самым в области  $F$  плоскости  $\Xi\text{H}$  определена функция  $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ .

**Теорема.** *При отображении области  $D$  плоскости  $XY$  на область  $F$  плоскости  $\Xi\text{H}$ , осуществляя ом функцией  $w(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ , уравнение Лапласа для функции  $u(x, y)$  переходит в уравнение Лапласа для функции  $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  лишь в том случае, если данное отображение является конформным.*

### 3.5. Интеграл Кристоффеля-Шварца. Отображение многоугольников

Пусть на комплексной плоскости  $W$  задан  $n$ -угольник с вершинами в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и внутренними углами при вершинах  $\beta_1\pi, \beta_2\pi, \dots, \beta_n\pi$ , соответственно;  $\sum_{i=1}^n \beta_i = n - 2$ . Пусть требуется построить конформное отображение верхней полуплоскости  $Z$  на внутренность такого многоугольника. Эта задача решается с помощью так называемого

интеграла Кристоффеля-Шварца.

Рассмотрим функцию комплексной переменной  $z = x + iy$ , определяемую в верхней полуплоскости  $Z$  выражением:

$$w = w(z) = C_1 \int_{z_0}^z (\zeta - a_1)^{\beta_1-1} (\zeta - a_2)^{\beta_2-1} \dots (\zeta - a_n)^{\beta_n-1} d\zeta + C_2, \quad (3)$$

где  $z_0, C_1, C_2$  — комплексные постоянные;  $a_1, \dots, a_n$  — действительные числа, расположенные в порядке возрастания;  $\beta_1, \dots, \beta_n$  — положительные числа, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = n - 2; \quad 0 < \beta_i < 2; \quad \beta_i \neq 1. \quad (4)$$

В подынтегральном выражении (3) выбраны те ветви функции  $(\zeta - a_k)^{\beta_k-1}$ , которые являются непосредственным аналитическим продолжением в верхнюю полуплоскость действительных функций  $(x - a_k)^{\beta_k-1}$  действительной переменной  $x > a_k$ . В таком случае функция (3) является однозначной аналитической функцией в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  и называется интегралом Кристоффеля-Шварца. Функция (3) при соответствующем выборе точек  $a_k$  осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на внутреннюю область некоторого  $n$ -угольника на плоскости  $W$ . Так как все числа  $\beta_k$  ограничены ( $0 < \beta_k < 2$ ), то функция (3) ограничена всюду при  $\operatorname{Im} z > 0$ .

Интеграл (3) является однозначной аналитической функцией в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  и осуществляет отображение этой полуплоскости на некоторую ограниченную область плоскости  $W$ . Посмотрим в какую кривую при этом переходит ось  $OX$  плоскости  $Z$ . Для этого рассмотрим производную функции  $w(z)$ ; из (3) имеем

$$w'(z) = C_1 (\zeta - a_1)^{\beta_1-1} \dots (\zeta - a_n)^{\beta_n-1}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что производная функции  $w(z)$  отлична от нуля всюду в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , за исключением особых точек  $a_k$ , в которых она обращается в нуль или бесконечность. Аргумент производной  $w'(z)$  не меняется при изменении  $z$  на каждом из интервалов  $a_k < x < a_{k+1}$  действительной оси  $OX$ .

Действительно, в силу указанного выше выбора ветвей функций  $(\zeta - a_k)^{\beta_k-1}$  имеем

$$(\zeta - a_k)^{\beta_k-1} = |\zeta - a_k| \exp((\beta_k - 1) \arg(\zeta - a_k));$$

аргумент этих функций  $\arg(\zeta - a_k)^{\beta_k - 1} = (\beta_k - 1)\arg(\zeta - a_k)$  на оси  $OX$  принимает значения

$$\arg(x - a_k)^{\beta_k - 1} = \begin{cases} \pi(\beta_k - 1), & x < a_k, \\ 0, & x > a_k, \end{cases} \quad (6)$$

что и доказывает высказанное утверждение.

В силу геометрического смысла аргумента производной это означает, что отрезки действительной оси  $a_k < x < a_{k+1}$  функцией  $w(z)$  отображаются также на прямолинейные отрезки плоскости  $W$ . (Аргумент функции  $w'(z)$  в точке  $z_0$  определяет величину угла, на который нужно повернуть касательную к гладкой кривой  $\gamma$ , проходящей через точку  $z_0$ , чтобы получить касательную к образу этой кривой  $\Gamma$  в точке  $w_0 = w(z_0)$ ). При этом точки  $a_k$  действительной оси  $OX$  функцией (3) переводятся в точки  $A_k$  плоскости  $W$  (концы соответствующих прямолинейных отрезков  $A_k A_{k+1}$ , на которые функция (3) отображает отрезки действительной оси  $[a_k, a_{k+1}]$ ). Тем самым функция (3) непрерывная и однозначная на действительной оси, производит отображение действительной оси плоскости  $Z$  на некоторую замкнутую ломаную линию  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_1$ , звеньями которой являются прямолинейные отрезки  $A_k A_{k+1}$  (рис. 2). Когда точка  $z$  проходит всю ось  $OX$  в положи-

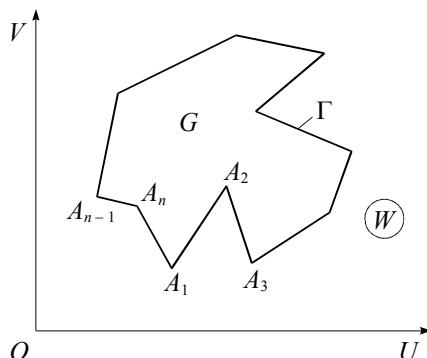


Рис. 2. Область, на которую отображается верхняя полуплоскость плоскости  $Z$

тельном направлении, соответствующая ей точка  $w$  совершает полный обход замкнутой ломаной  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Определим теперь величину углов между соседними отрезками полученной ломаной. Для этого рассмотрим, как меняется аргумент производной (5) при переходе  $z$  через точку  $a_i$ . Из (6) следует, что при дви-

жении точки  $z$  по действительной оси  $OX$  в положительном направлении, при котором особая точка  $a_i$  обходится по дуге бесконечно малого радиуса в верхней полуплоскости, аргумент производной меняет свое значение на величину  $\pi(\beta_i - 1)$ . В силу геометрического смысла аргумента производной это означает, что величина угла между направлениями векторов  $\mathbf{A}_{i-1}\mathbf{A}_i$  и  $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i+1}$  равна  $\pi(\beta_i - 1)$ . (Под углом между направлениями пересекающихся прямых понимается угол наибольшего поворота, совмещающего одну прямую с другой). При  $\beta_i < 1$  переход от направления вектора  $\mathbf{A}_{i-1}\mathbf{A}_i$  к направлению вектора  $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i+1}$  происходит в положительном (рис. 3, *a*), а при  $\beta_i > 1$  в отрицательном направлении (рис. 3, *б*).

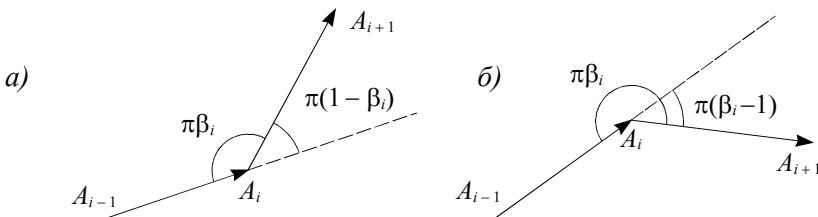


Рис. 3. Углы  $\beta_i$  при вершинах  $A_i$  многоугольника: *а*)  $\beta_i < 1$ , *б*)  $\beta_i > 1$

Таким образом, если замкнутая ломаная  $A_1, A_2, \dots, A_n$  не имеет самопересечений, то она ограничивает некоторый  $n$ -угольник. Если, кроме того, движению точки  $z$  в положительном направлении действительной оси  $OX$  соответствует обход ломаной  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в положительном направлении, то внутренний угол данного  $n$ -угольника при вершине  $A_i$ , на которую отображается точка  $a_i$  действительной оси  $OX$ , равен  $\pi\beta_i$ . В силу условия (4) при этом сумма всех внутренних углов данного  $n$ -угольника равна  $(n-2)\pi$ , как и должно быть. На основании принципа соответствия границ (теорема) можно утверждать, что если ломаная  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , на которую функция (3) отображает действительную ось плоскости  $Z$ , не имеет точек самопересечения и сохраняется направление обхода, то функция (3) осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на внутренность  $n$ -угольника, ограниченного ломаной линией  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Составление интеграла Кристоффеля-Шварца проводят в такой последовательности.

1. Анализируют исследуемую область на плоскости  $W$ , которую необходимо отобразить конформно на верхнюю полуплоскость  $Z$ . Если известно ее конформное отображение на верхнюю полуплоскость, то переходят к изучению потенциалов. Если же такое конформное отобра-

жение не известно, то границу этой области аппроксимируют ломаной линией и нумеруют точки излома  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и определяют внутренние углы  $\beta_1\pi, \beta_2\pi, \dots, \beta_n\pi$  при вершинах ломаной.

2. Строят функцию  $w(z)$  в форме (3), отображающую верхнюю полуплоскость на  $n$ -угольник с заданными углами  $\beta_1\pi, \beta_2\pi, \dots, \beta_n\pi$ . Постоянные  $z_0, C_1, C_2$  и числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  подбирают таким образом, чтобы отображение было именно на заданный многоугольник. Процедуру выбора постоянных рассмотрим на примере.

Пример. Найти функцию  $w = w(z)$ , конформно отображающую верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  плоскости  $XY$  на прямоугольник  $A_1A_2A_3A_4$  плоскости  $UV$  (см. рис. 4).

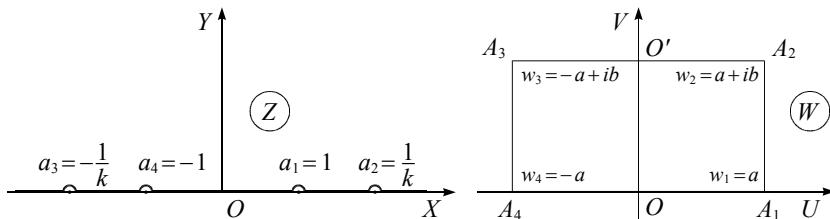


Рис. 4. Геометрия конформного отображения верхней полуплоскости  $Z$  на правую половину  $OA_1A_2A_3A_4$  прямоугольника  $W$

Пусть вершины прямоугольника на плоскости  $W$  расположены в точках  $A_1(w_1 = a), A_2(w_2 = a + ib), A_3(w_3 = -a + ib), A_4(w_4 = -a)$ . Пусть с помощью функции  $w(z)$  произведено конформное отображение первого квадранта плоскости  $Z$  ( $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$ ) на правую половину  $OA_1A_2O'$  прямоугольника (рис. 4), при котором положительная часть мнимой оси  $OY$  плоскости  $Z$  переходит в отрезок  $OO'$ . Тогда на основании принципа симметрии функция, являющаяся аналитическим продолжением  $w(z)$  в область ( $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$ ), осуществляет конформное отображение данной области на левую часть исходного прямоугольника. При этом в вершины  $A_1$  и  $A_4$  переходят, соответственно, симметричные точки действительной оси  $OX$  плоскости  $Z$ . То же самое имеет место для вершин  $A_2$  и  $A_3$ . Поэтому можем установить следующее соответствие точек:

$$\begin{aligned} a_1(z_1 = 1) &\rightarrow A_1(w_1 = a), \\ a_4(z_4 = -1) &\rightarrow A_4(w_4 = -a). \end{aligned} \tag{7}$$

Кроме того, должно иметь место соответствие

$$z = 0 \rightarrow w = 0. \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) устанавливают соответствие трех граничных точек, поэтому произвольно задать точку  $a_2$  на действительной оси плоскости  $Z$ , переходящую в вершину  $A_2$  прямоугольника, уже нельзя. Положим, что в вершину  $A_2$  переходит точка  $a_2 = 1/k$  действительной оси  $OX$ . Очевидно, что  $0 < k < 1$ .

Интеграл Кристоффеля-Шварца, осуществляющий конформное отображение верхней полуплоскости на заданный прямоугольник, может быть представлен согласно (3) в виде

$$w = w(z) = C_1 \int_{z_0}^z (\zeta - 1)^{1/2-1} (\zeta - 1/k)^{1/2-1} (\zeta + 1/k)^{1/2-1} (\zeta + 1)^{1/2-1} d\zeta + C_2 =$$

$$= C_1 \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + C_2.$$

Положив  $z_0 = 0$  и использовав соотношение (8), получим  $C_2 = 0$ . Тогда

$$w = C_1 \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}. \quad (9)$$

Остается определить постоянные  $C_1$  и  $k$  из соответствия точек  $a_1$  и  $a_2$  (действительной оси плоскости  $Z$ ) вершинам  $A_1$  и  $A_2$ . Отметим, что интеграл (9) не выражается в элементарных функциях. Это так называемый эллиптический интеграл 1-го рода, который обычно обозначается  $F(z, k)$ .

Условия (7) дают

$$a = C_1 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \equiv C_1 \cdot K(k), \quad (10)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Соответствие точек

$$a_2(z = 1/k) \rightarrow A_2(w = a + bi)$$

позволяет записать

$$a + ib = C_1 \left\{ \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + i \int_1^{1/k} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \right\},$$

откуда, учитя (10), получим

$$b = C_1 \int_1^{1/k} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \equiv C_1 \tilde{F}(1/k, k), \quad (11)$$

Из (10) и (11) при заданных величинах  $a$  и  $b$  можно, решив трансцендентное уравнение

$$a \tilde{F}(1/k, k) = b K(k), \quad (12)$$

определить значения постоянных  $k$  и  $C_1$ . Тем самым функция (9), осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на заданный прямоугольник плоскости  $W$ , полностью определена. С другой стороны, если в формуле (9) заданы величины  $k$  и  $C_1$ , то эта функция осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на прямоугольник плоскости  $W$ , отношение сторон  $(a/b)$  которого определяется формулой (12), а абсолютная величина сторон — постоянной  $C_1$ .

Подобным образом верхняя полуплоскость  $Z$  конформно отображается на произвольный многоугольник. Расчет постоянных в интеграле Кристоффеля-Шварца (формула (3)) можно всегда провести численными методами.

## Список литературы

1. Батавин В. В., Концевой Ю. А., Федорович Ю. В. Измерение параметров полупроводниковых материалов и структур. — М.: Радио и связь, 1985. -264 с.
2. Ван Флек Л. Теоретическое и прикладное материаловедение. — М.: Атомиздат, 1975. -472 с.
3. Воробьев Ю. В., Добровольский В. Н., Стриха В. И. Методы исследования полупроводников. — К.: Выща школа, 1988. -232с.
4. Готра З. Ю. Технология микроэлектронных устройств: Справочник. — М.: Радио и связь, 1991. -528 с.
5. Зеегер К. Физика полупроводников. -М.: Мир, 1977. -616 с.
- Кембровский Г. С. Приближенные вычисления, методы обработки
6. результатов измерений и оценки погрешностей в физике. — Мн.: ООО “Оракул”, 1997. -207 с.
7. Кунце Х. -И. Методы физических измерений. — М.: Мир, 1989. - 216 с.
8. Кучис Е. В. Гальваномагнитные эффекты и методы их исследования. — М.: Радио и связь, 1990. -264 с.
9. Липсон Г. Великие эксперименты в физике. — М.: Мир, 1972. -216с.
10. Мейзда Ф. Электронные измерительные приборы и методы измерений. — М.: Мир, 1990. -535 с.
11. Павлов Л. П. Методы измерения параметров полупроводниковых материалов. — М.: Высшая школа, 1987. -239 с.
12. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1989. -480 с.
13. Сквайрс Дж. Практическая физика. — М.: Мир, 1971. -248 с.
14. Соклоф С. Аналоговые интегральные схемы. — М.: Мир, 1988. - 583 с.
15. Солимар Л., Уолш Д. Лекции по электрическим свойствам материалов. — М.: Мир, 1991. -504 с.
16. Татур Т. А. Основы теории электромагнитного поля. — М.: Высшая школа, 1989. -271 с.
17. Тилл У., Лаксон Дж. Интегральные схемы: Материалы, приборы, изготовление. — М.: Мир, 1985. -501 с.
18. Тригг Дж. Физика XX века: ключевые эксперименты. — М.: Мир, 1978. -376 с.; Решающие эксперименты в современной физике. — М.: Мир, 1974. -160 с.
19. Шабалин С. А. Прикладная метрология в вопросах и ответах. — М.: Изд-во стандартов, 1990. -192 с.
20. Шульц Ю. Электроизмерительная техника: 1000 понятий для практиков. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 288 с.

Учебное издание

Поклонский Николай Александрович  
Белявский Станислав Станиславович  
Вырко Сергей Александрович  
Лапчук Татьяна Михайловна

**Четырехзондовый метод измерения  
электрического сопротивления  
полупроводниковых материалов**

*Учебно-методическое пособие*

по спецпрактикуму “Физика полупроводниковых  
материалов и приборов” для студентов специализаций:  
Н.02.01.06 - “Физика полупроводников и диэлектриков”,  
Н.02.01.14 - “Микроэлектроника”,  
Н.02.01.17 - “Новые материалы и технологии”

Ответственный за выпуск *Н.А. Поклонский*

Подписано к печати 6.10.98. Формат 60×84/16. Бумага офс. № 1.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,7. Тираж 115 экз. Заказ № 4271.  
Белгосуниверситет. 220050. Минск, пр. Ф. Скорины, 4.

*Отпечатано на предприятии “Технопринт”.  
Лицензия ЛП №203.  
220027, Минск, пр. Ф. Скорины, 65, корп. 14.*



